Wersja testu **D** 27 czerwca 2011 r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\log_7\sqrt{5} = \sqrt{\log_7 5}$;

b) $\log_7 2 \cdot \log_7 3 = \log_7 6$;

c) $\log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 6$;

d) $\log_2 \log_4 16 = \log_4 \log_2 16$?

2. Czy funkcja $f\colon [0,1] \to [0,1]$ zadana podanym wzorem jest bijekcją?

a) $f(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}x)$;

b) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$;

c) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$;

d) $f(x) = 4x(1-x)$.

3. Czy ciąg $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$ jest zbieżny do zera?

a) $a_n = \frac{\sin(n^2)}{\sqrt[4]{n+1}}$;

b) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$;

c) $a_n = e^n \cdot \ln\frac{1}{n}$;

d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n+1}}$.

4. Pochodna pewnego wielomianu P stopnia 4 (o współczynnikach rzeczywistych) zeruje się w $x = 2$, w $x = 3$ i nigdzie indziej. Wiadomo też, że $P(x) > 0$ dla wszystkich x rzeczywistych. Czy wynika stąd, że

a) wykres P ma punkt przegięcia ;

b) P nie ma żadnego maksimum lokalnego ;

c) P jest funkcją rosnącą na przedziale $(2, +\infty)$;

d) P jest funkcją rosnącą na przedziale $(2, +\infty)$ lub P jest funkcją malejącą na przedziale $(-\infty, 3)$?

5. Niech $V(r, h)$ oznacza objętość walca o promieniu r i wysokości h. Czy podana funkcja zmiennej x jest funkcją stałą?

a) $V(x, 1/x^2)$;

b) $V(e^x, \sqrt{e^{-x}})$;

c) $V(\sqrt{e^{-x}}, e^x)$;

d) $V(x, x^2)$.

6. Niech $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Czy

a) $a_2 < \pi/4$;

b) $a_1 < \pi/4$;

c) $a_3 < \pi/4$;

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

7. Czy podany szereg jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+nx}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$.

8. Czy funkcja dwóch zmiennych $f(x,y) = a\cos x + b\cos y$ ma lokalne minimum w $(x,y) = (0,0)$, jeśli

a) $a = -1$, $b = -1$;

b) $a = -1$, $b = 1$;

c) $a = 1$, $b = -1$;

d) $a = 1$, $b = 1$?

9. Funkcję liniową $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ograniczono do pewnego sześcianu P. Czy wśród punktów, w których tak ograniczona funkcja przyjmuje swą największą wartość

a) może być dokładnie 5 wierzchołków P ;

b) mogą być dokładnie 2 wierzchołki P ;

c) mogą być dokładnie 3 wierzchołki P ;

d) mogą być dokładnie 4 wierzchołki P ?

10. Czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y''(t) = y'(t)$?

a) $y(t) = e^{0 \cdot t}$;

b) $y(t) = e^t$;

c) $y(t) = e^t + e^{-t}$;

d) $y(t) = e^{-t}$.

11. Na płaszczyźnie zaznaczono punkty odpowiadające liczbom zespolonym z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6. Okazało się, że otrzymane punkty są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku 1. Niech

$$w = \frac{1}{6}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6).$$

Czy jest prawdą, że

a) $w = \frac{z_1+z_3+z_5}{3}$;

b) $\frac{z_3-w}{z_1-w} = \left(\frac{z_2-w}{z_1-w}\right)^2$;

c) $z_3 \neq w$;

d) $\frac{z_2-w}{z_1-w} \cdot \frac{z_5-w}{z_1-w} = 1$?

12. Wektory $(1,1,1)$ i $(1,1,0)$ są wektorami własnymi pewnej symetrycznej macierzy rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych. Czy wynika stąd, że wektorem własnym tej macierzy jest również wektor

a) $(1,2,2)$;

b) $(1,-1,0)$;

c) $(2,2,1)$;

d) $(0,0,1)$?

13. Czy $v \times u = w$, jeśli $u = (1,1,1)$, $w = (1,0,-1)$ zaś

a) $v = (-1,3,2)$;

b) $v = (1,2,3)$;

c) $v = (3,2,1)$;

d) $v = (-1,0,1)$?

14. Liniowe przekształcenie $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ o wyznaczniku 1 spełnia warunek $F\binom{1}{0} = \binom{1}{0}$. Czy wynika stąd, że

a) druga współrzędna wektora $F\binom{0}{-1}$ jest równa 1 ;

b) druga współrzędna wektora $F\binom{0}{1}$ jest równa 1 ;

c) $F\binom{0}{2} = \binom{0}{2}$;

d) pierwsza współrzędna wektora $F\binom{1}{1}$ jest równa 1 ?

15. Zbiór wszystkich liczb zespolonych o module 1 tworzy grupę (z mnożeniem jako działaniem). Czy w grupie tej jest element

a) rzędu 4 ;

b) nieskończonego rzędu ;

c) rzędu 2 ;

d) rzędu 3 ?

16. Czy w pierścieniu $C(I)$ funkcji ciągłych na przedziale $I = [0,1]$ jest nieskończenie wiele

a) elementów niebędących dzielnikami zera ;

b) dzielników zera ;

c) elementów nieodwracalnych ;

d) elementów odwracalnych ?

17. Czy zbiór $\{a + b\sqrt[n]{64} \; : \; a, b \in \mathbf{Q}\}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych dla

a) $n = 11$;

b) $n = 9$;

c) $n = 12$;

d) $n = 10$?

18. Wybrano losowo jeden z zespolonych pierwiastków z 1 stopnia 2011 (każdy z tym samym prawdopodobieństwem). Niech zmienna losowa Z będzie równa wybranemu pierwiastkowi. Czy jest prawdą, że

a) $P(\mathrm{Im}(Z) > 0) = 1/2$;

b) $P(\mathrm{Re}(Z) > 0) = P(\mathrm{Re}(Z) < 0)$;

c) $P(\mathrm{Im}(Z) > 0) = P(\mathrm{Im}(Z) < 0)$;

d) $P(\mathrm{Re}(Z) > 0) = 1/2$?

19. Współczynniki wielomianu $Q(X)$ stopnia 5 są wszystkie równe ± 1, przy czym znaki ustalono przez sześć niezależnych rzutów monetą (orzeł: $+$, reszka: $-$). Czy

a) $P(Q(2) > 0) = P(Q(2) < 0)$;

b) $E(Q(2)) = 0$;

c) $P(Q(2) + Q(-2) = 0) = 1/2$;

d) $P(Q(2) > 0) = P(Q(-2) > 0)$?

20. W zdaniu

$$(Kx \in \mathbf{R}^3)(Ky \in \mathbf{R}^3)(Kz \in \mathbf{R}^3)(x, y, z \text{ są liniowo niezależne})$$

litery "K" zamieniono na kwantyfikatory, niezależnie każdą z nich zastępując kwantyfikatorem ogólnym z prawdopodobieństwem p, zaś egzystencjalnym z prawdopodobieństwem $1 - p$. Niech $P(p)$ oznacza prawdopodobieństwo, że otrzymane zdanie jest prawdziwe. Czy wtedy

a) $P(1/3) > 0{,}9$;

b) $P(1/3) + P(2/3) = 1$;

c) $\lim_{p\to 1} P(p) = 0$;

d) $P(3/4) < 1/2$?