

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011**  
**Biomatematyka**

**91** .....

*Zadanie* **1**. (8 punktów)

Liczebność pewnej populacji jest opisana równaniem różniczkowym:

$$\frac{dN}{dt} = r N(\alpha - N)(N - \beta), \quad (1)$$

w którym,  $N(t)$  oznacza liczebność populacji w chwili  $t$ , a  $r > 0$  i  $0 < \beta < \alpha$  są stałymi.

- (a) Znajdź rozwiązania stacjonarne równania (1).
- (b) Zbadaj stabilność znalezionych w punkcie (a) rozwiązań.
- (c) Przy jakiej liczebności populacja zmienia swą liczebność najszybciej ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Założmy, że w diploidalnej populacji, która kojarzy się w sposób losowy względne dostosowania genotypów  $AA$ ,  $Aa$  i  $aa$  są w stosunku  $1 : 1 - s : 1 - 2s$ .

- (a) Oblicz częstość allelu  $a$  w następnej generacji zakładając, że w obecnej populacji występuje on z częstością  $p$ .
- (b) Jeśli dodatkowo założymy, że częstości mutacji  $A \rightarrow a$  oraz  $a \rightarrow A$  są takie same i wynoszą  $\mu$ , to jaka będzie częstość allelu  $A$  w następnej generacji ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 ..... ..

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Równanie regresji liniowej zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o średnich  $\mu_X$  i  $\mu_Y$  oraz odchyleniach standardowych  $\sigma_X$  i  $\sigma_Y$  oraz współczynnika korelacji  $\rho$  jest postaci  $Y = \beta X + \alpha$ , gdzie  $\beta$  i  $\alpha$  minimalizują wariancję  $Y - (\beta X + \alpha)$  oraz  $EY = E(\beta X + \alpha)$ . Zmienne losowe  $Z$  i  $T$  o wartościach oczekiwanych 0 mają odchylenia standardowe  $\sigma_Z = 2$ ,  $\sigma_T = 1$  i współczynnik korelacji 1. Znajdź równanie regresji liniowej  $Z + T$  względem  $T$ . Jaki jest współczynnik korelacji  $Z + T$  i  $T$  ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech  $a$  będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Pokaż, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x) = d(a, x)$  jest ciągła. Czy funkcja  $f$  jest ciągła jednostajnie? Czy spełnia warunek Lipschitza?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)} dx$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Biomatematyka

91 .....

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**92** .....

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Rolnik ma wybrać pod uprawę jeden z trzech rodzajów zbóż. Plony tych zbóż w kwintalach z jednego hektara w zależności od warunków pogodowych podaje poniższa tabela:

$$W = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{Zboża} & A & B & C & D \\ \hline \text{Żyto} & 24.5 & 18.0 & 18.0 & 16.0 \\ \hline \text{Pszenica} & 18.0 & 32.0 & 24.0 & 21.0 \\ \hline \text{Jęczmień} & 15.0 & 19.0 & 26.0 & 19.0 \\ \hline \end{array}$$

Ustal, jaka powinna być decyzja rolnika, jeśli

- a) nie zna częstości występowania poszczególnych warunków pogodowych,
- b) jest umiarkowanym optymistą, tzn. jego współczynnik optymizmu wynosi  $p = 0.7$ ,
- c) zależy mu na zminimalizowaniu straty z powodu podjęcia niewłaściwej decyzji.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 ..... ..

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**92** .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Założmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem  $s(x) = P(T > x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}$ , dla  $0 \leq x \leq 100$  oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

- 1) Obliczyć JSN dla następującej renty (30)-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 80, jeśli żyje pod koniec trzeciego roku wypłata wynosi 270. Przyjąć stopę procentową  $i = 50\%$ .
- 2) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że 20-latek umrze przed ukoczeniem 50-tego roku życia, pod warunkiem, że dożył 40 lat.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 ..... ..

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**92** .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Równanie regresji liniowej zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o średnich  $\mu_X$  i  $\mu_Y$  oraz odchyleniach standardowych  $\sigma_X$  i  $\sigma_Y$  oraz współczynnika korelacji  $\rho$  jest postaci  $Y = \beta X + \alpha$ , gdzie  $\beta$  i  $\alpha$  minimalizują wariancję  $Y - (\beta X + \alpha)$  oraz  $EY = E(\beta X + \alpha)$ . Zmienne losowe  $Z$  i  $T$  o wartościach oczekiwanych 0 mają odchylenia standardowe  $\sigma_Z = 2$ ,  $\sigma_T = 1$  i współczynnik korelacji 1. Znajdź równanie regresji liniowej  $Z + T$  względem  $T$ . Jaki jest współczynnik korelacji  $Z + T$  i  $T$  ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech  $a$  będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Pokaż, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x) = d(a, x)$  jest ciągła. Czy funkcja  $f$  jest ciągła jednostajnie? Czy spełnia warunek Lipschitza?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 ..... ..

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)} dx$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

Zadanie **1**. (8 punktów)

Czy ciąg  $(x_n, y_n) \in R^2$  zadany wzorem

$$\begin{aligned} 2x_{n+1} + y_n &= 3, \\ -x_n - 2y_{n+1} &= -3, \end{aligned}$$

dla  $n = 0, 1, \dots$  i dowolnego  $(x_0, y_0) \in R^2$  jest zbieżny? Odpowiedź uzasadnić oraz obliczyć granicę.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
int g(int a, int b)
{
    if(!a || !b)
        return (a<b ? b : a);
    if( a<b )
        return g(a, b-a);
    return g(a-b, b);
}

int main()
{
    int a,b;

    a = 10;
    b = 6;
    printf("g(%i,%i): %i\n",a, b, g(a, b));
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Niech  $c = g(a, b)$  będzie funkcją z programu. Czy istnieją liczby całkowite  $x, y$  o własności:  $10x + 6y = g(10, 6)$  ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Równanie regresji liniowej zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o średnich  $\mu_X$  i  $\mu_Y$  oraz odchyleniach standardowych  $\sigma_X$  i  $\sigma_Y$  oraz współczynnika korelacji  $\rho$  jest postaci  $Y = \beta X + \alpha$ , gdzie  $\beta$  i  $\alpha$  minimalizują wariancję  $Y - (\beta X + \alpha)$  oraz  $EY = E(\beta X + \alpha)$ . Zmienne losowe  $Z$  i  $T$  o wartościach oczekiwanych 0 mają odchylenia standardowe  $\sigma_Z = 2$ ,  $\sigma_T = 1$  i współczynnik korelacji 1. Znajdź równanie regresji liniowej  $Z + T$  względem  $T$ . Jaki jest współczynnik korelacji  $Z + T$  i  $T$  ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech  $a$  będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Pokaż, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x) = d(a, x)$  jest ciągła. Czy funkcja  $f$  jest ciągła jednostajnie? Czy spełnia warunek Lipschitza?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)} dx$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Udowodnij, że dla trójkąta prostokątnego suma długości średnicy okręgu wpisanego i średnicy okręgu opisanego jest równa sumie długości przyprostokątnych.



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Czy równanie  $111x + 13y = 1$  ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?  
Jeśli tak, to podaj przykładowe rozwiązanie. Ile dzielników ma liczba 23760 ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Równanie regresji liniowej zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o średnich  $\mu_X$  i  $\mu_Y$  oraz odchyleniach standardowych  $\sigma_X$  i  $\sigma_Y$  oraz współczynniku korelacji  $\rho$  jest postaci  $Y = \beta X + \alpha$ , gdzie  $\beta$  i  $\alpha$  minimalizują wariancję  $Y - (\beta X + \alpha)$  oraz  $EY = E(\beta X + \alpha)$ . Zmienne losowe  $Z$  i  $T$  o wartościach oczekiwanych 0 mają odchylenia standardowe  $\sigma_Z = 2$ ,  $\sigma_T = 1$  i współczynnik korelacji 1. Znajdź równanie regresji liniowej  $Z + T$  względem  $T$ . Jaki jest współczynnik korelacji  $Z + T$  i  $T$  ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Niech  $a$  będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Pokaż, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x) = d(a, x)$  jest ciągła. Czy funkcja  $f$  jest ciągła jednostajnie? Czy spełnia warunek Lipschitza?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)} dx$ .



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Niech  $f$  będzie całkowalna w sensie Lebesgue'a na  $[0, 1]$  i niech

$$\int_{[0,1]} f(x)x^{\alpha n} dx = 0$$

gdzie  $\alpha > 0$  jest ustalone a  $n$  przebiega liczby naturalne.

Pokazać, że wtedy  $f(x) = 0$  prawie wszędzie.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech

$$Tf(x) = \int_0^x f(u)du$$

Sprawdzić, że jest to operator ograniczony  $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ , oraz  $C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  oraz policzyć jego spektrum na obu przestrzeniach. Czy  $T$  jest zwarty ? Uzasadnij swoją odpowiedź.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Policzyć transformate Fouriera funkcji Gaussa

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-t^2} dt.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Niech  $a$  będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Pokaż, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x) = d(a, x)$  jest ciągła. Czy funkcja  $f$  jest ciągła jednostajnie? Czy spełnia warunek Lipschitza?



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)} dx$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku  $[0, 2]$ . Wyznaczyć  $\mu, \sigma$  tak, aby:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - X_1 - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}$$

według rozkładu, gdy  $n \rightarrow \infty$ , gdzie  $\mathcal{N}$  ma rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Odpowiedź uzasadnić.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Udowodnij, że proces  $M(t) = B^2(t) - t$  jest martyngałem względem naturalnej filtracji ruchu Browna  $B$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Niech  $F$  i  $G$  będą dowolnymi jednowymiarowymi dystrybuantami oraz niech  $X$  będzie zmienną losową o dystrybuancie  $\theta F + (1 - \theta)G$ , gdzie  $\theta \in [0, 1]$  jest nieznanne. Podaj postać testu JNM na poziomie istotności  $\alpha$  dla testowania hipotezy  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  przeciwko  $H_1 : \theta > \theta_0$ , gdzie  $\theta_0 \in [0, 1]$  jest znane.



EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **4.** (8 punktów)

Niech  $a$  będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ . Pokaż, że funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x) = d(a, x)$  jest ciągła. Czy funkcja  $f$  jest ciągła jednostajnie? Czy spełnia warunek Lipschitza?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)} dx$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 29.06.2011  
Zastosowania

96 .....