**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Biomatematyka**

**90** **..................** ...................................

*Zadanie* **1. (8 punktów)**

Liczebność pewnej populacji ryb jest opisana następującym równaniem Rickera:

$$N_{n+1} = \alpha \, N_n \exp(-\beta N_n), \tag{1}$$

w którym $N_n$ oznacza liczebność populacji w $n-$tej generacji a $\alpha$ oraz $\beta$ są dodatnimi stałymi.

**(a)** Znajdź rozwiązania stacjonarne równania (1).

**(b)** Zbadaj stabilność znalezionych w punkcie (a) rozwiązań.

**(c)** Podaj biologiczną interpretację parametrów $\alpha$ i $\beta$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
**Biomatematyka**

**90** **...................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Biomatematyka**

**90** ................... ....................................

*Zadanie* **2. (8 punktów)**

Genetyk założył, że nukleotydy w różnych miejscach nici DNA podlegają mutacji w sposób niezależny i zgodny z tym samym dyskretnym modelem Jukesa-Cantora.

**(a)** Przy tak przyjętych założeniach, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że po jednym kroku w wyniku mutacji nić DNA

$$CTAGGGATTAATCCAATGCT,$$

przyjmie postać

$$CTA\boxed{C}GGA\boxed{CA}AATCC\boxed{T}\boxed{T}TGCT.$$

**(b)** Na podstawie zdarzenia z punktu (a) oszacuj parametry przyjętego przez genetyka modelu mutacji.

**(c)** Jakiej częstości poszczególnych nukleotydów może oczekiwać genetyk na podstawie otrzymanego w punkcie (b) modelu mutacji, gdyby proces mutacji przebiegał dostatecznie długo ?

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Biomatematyka**

**90** **....................** ......................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Biomatematyka**

**90** .................. ..................................

*Zadanie* **3. (8 punktów)**

Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 2, zmienna losowa $Y$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 1. Wylosowano niezależnie jedną wartość zmiennej $X$ i dwie wartości zmiennej $Y$. Na podstawie w ten sposób uzyskanych wartości $x_1$, $y_2$, $y_2$, wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\mu$. Oblicz jego obciążenie i odchylenie standardowe.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
**Biomatematyka**

**90** .................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Biomatematyka**

**90** **..................** ...................................

*Zadanie* **4. (8 punktów)**

Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ wskaż zbiór otwarty $G \subset R$ spełniający warunki: $\lambda(G) < \epsilon, \quad \mathrm{Cl}\, G = R$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Biomatematyka

**90** .................... ....................................

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
**Biomatematyka**

**90** ................... ....................................

*Zadanie* **5. (8 punktów)**

Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna w obszarze $V$, oraz koło domknięte ograniczone okręgiem $K$ o środku w punkcie $a$ i promieniu $r$ zawiera się w $V$. Pokaż, że $2\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}\,z = \int_K \frac{f''(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}\,z$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Biomatematyka

**90** ................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**91 ..................** ....................................

*Zadanie* **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = 1 - \frac{x}{100}$ dla $x \in [0, 100]$ oraz że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

1) Obliczyć prawdopodobieństwo, że 30-latek umrze pomiędzy 40 i 50 rokiem życia, pod warunkiem, że przeżył co najmniej 45 lat.

2) Wyznaczyć JSN dla czystego ubezpieczenia na życie na 2 lata dla osoby w wieku 50 lat. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$ oraz sumę ubezpieczenia równą 1000.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

**91** **..................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**91** **..................** ...................................

*Zadanie* **2. (8 punktów)**

Producent podda trzy rodzaje hamulców: I, II oraz III testom w trzech różnych rodzajach warunków drogowych: A, B i C. Procent zadowalających prób podaje poniższa tabela:

$W =$

| Hamulce | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| I | 85.0 | 75.0 | 95.0 |
| II | 85.0 | 90.0 | 75.5 |
| III | 85.0 | 65.0 | 92.0 |

Który rodzaj hamulców ma wybrać do produkcji, jeśli
a) nie zna częstości występowania poszczególnych warunków drogowych,
b) jest umiarkowanym optymistą, tzn. jego współczynnik optymizmu wynosi $p = 0.5$,
c) zależy mu na zminimalizowaniu straty z powodu podjęcia niewłaściwej decyzji.

**91** **..................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**91** **..................** ...................................

*Zadanie* **3. (8 punktów)**

Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 2, zmienna losowa $Y$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 1. Wylosowano niezależnie jedną wartość zmiennej $X$ i dwie wartości zmiennej $Y$. Na podstawie w ten sposób uzyskanych wartości $x_1$, $y_2$, $y_2$, wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\mu$. Oblicz jego obciążenie i odchylenie standardowe.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

**91** ................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**91** **..................** ...................................

*Zadanie* **4. (8 punktów)**

Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ wskaż zbiór otwarty $G \subset R$ spełniający warunki: $\lambda(G) < \epsilon, \quad \mathrm{Cl}\, G = R.$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

**91** .................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**91** ................... ...................................

*Zadanie* **5. (8 punktów)**

Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna w obszarze $V$, oraz koło domknięte ograniczone okręgiem $K$ o środku w punkcie $a$ i promieniu $r$ zawiera się w $V$. Pokaż, że $2\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}\,z = \int_K \frac{f''(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}\,z$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

**91** **....................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92 .................. ...................................**

*Zadanie* **1. (8 punktów)**

Niech dane będą kule o promieniach $R_1, R_2, ...$ będących niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 2]$. Niech $V_i$, dla $i = 1, 2, ...$, będzie objętością $i$-tej kuli. Zbadać zbieżność

$$\frac{\sum_{i=1+2011}^{n} V_i}{\sum_{i=1}^{n+2011} R_i},$$

gdy $n \to \infty$. Odpowiedź uzasadnić.

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92** **....................** ......................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92** .................. ..................................

*Zadanie* **2. (8 punktów)**

Dla procesu Poissona $N_t$ ze stałą intensywnością $\lambda > 0$, dla $s \geqslant t$ oraz nieujemnej liczby całkowitej $n$ znajdź $v(n) = E[N_s|N_t = n]$ oraz $E[N_s|N_t]$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
**Zastosowania**

**92** **....................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92** .................... ....................................

*Zadanie* **3. (8 punktów)**

Niech $\underline{X}_1 = (X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1})'$ oraz $\underline{X}_2 = (X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2})'$ będą niezależnymi próbami z rozkładu jednostajnego $U(0, \theta_1)$ oraz $U(0, \theta_2)$, odpowiednio, gdzie $\theta_1 > 0$ i $\theta_2 > 0$ są nieznanymi parametrami. Podaj postać testu ilorazu wiarogodności dla testowania hipotezy $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ przeciwko $H_0 : \theta_1 \neq \theta_2$ na poziomie istotności $\alpha$.

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92** **....................** .....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92** **..................** ....................................

*Zadanie* **4. (8 punktów)**

Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ wskaż zbiór otwarty $G \subset R$ spełniający warunki: $\lambda(G) < \epsilon, \quad \mathrm{Cl}\, G = R.$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011

**Zastosowania**

**92** ..................... ......................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Zastosowania**

**92** **..................** ....................................

*Zadanie* **5. (8 punktów)**

Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna w obszarze $V$, oraz koło domknięte ograniczone okręgiem $K$ o środku w punkcie $a$ i promieniu $r$ zawiera się w $V$. Pokaż, że $2\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}\,z = \int_K \frac{f''(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}\,z$ .

**92** **....................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka z informatyką**

**93** ................... ....................................

*Zadanie* **1. (8 punktów)**

Niech będzie dany wektor $f \in R^n$ i *trójdiagonalna* macierz $A \in R^{n\times n}$ określona wzorem

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \text{tridiag}(a, c, b) \in R^{n\times n}.$$

Wykazać, że jeśeli

$$|c| > |a| + |b|,$$

to wtedy *metoda Jacobiego* rozwiązania liniowego układu $Ax = f$ jest zbieżna.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka z informatyką

**93** **...................** ...................................

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka z informatyką

**93** ................... ...................................

*Zadanie* **2.** **(8 punktów)**
Dany jest program:

```
int val[] = {0, -1, -2, 3, 4, 1, -3, 2, -4, 5};

struct TTreeBST
{
   int Key;
   struct TTres
*left,*right;
};

\* tworzenie drzewa BST *\

void buildTree( struct TTreeBST **TreeRoot, int val)
{
if( *TreeRoot==NULL )
{
*TreeRoot         = (struct TTreeBST *)malloc(sizeof(struct TTreeBST));
      (*TreeRoot)->Key  = val;
      (*TreeRoot)->left = (*TreeRoot)->right = NULL;
      return;
   }
   if( (*TreeRoot)->Key > val )
   {
      printf("L ");
      buildTree( &(*TreeRoot)->left, val);
   }
   else
   {
      printf("P ");
      buildTree( &(*TreeRoot)->right, val);
   }
```

```
}

\* przegladanie BST *\

void tripTree( struct TTreeBST *TreeRoot )
{
   if( TreeRoot==NULL )
      return;
   tripTree( TreeRoot->left );
   printf("%3i", TreeRoot->Key);
   tripTree( TreeRoot->right );
}

int main()
{
   struct TTreeBST *TreeRoot, *wTree;
   int i,n;

   n = sizeof(val)\sizeof(val[0]);
   printf("Key: droga");
   TreeRoot = NULL;
   for(i=0; i<n; i=i+1)
   {
      printf("\n%3i: ", val[i]);
      buildTree( &TreeRoot, val[i]);
   }
   puts("\nWynik:");
   tripTree(TreeRoot );
   return 0;
}
```

Pytania:

1. Jaką podstawową cechę ma zbudowane binarne drzewo poszukiwań (Binary Search Tree, BST)? Odpowiedź uzasadnić.
2. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka z informatyką

**93** ................... .....................................

**93** .................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka z informatyką**

**93** **..................** ...................................

*Zadanie* **3.** **(8 punktów)**

Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 2, zmienna losowa $Y$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 1. Wylosowano niezależnie jedną wartość zmiennej $X$ i dwie wartości zmiennej $Y$. Na podstawie w ten sposób uzyskanych wartości $x_1,\ y_2,\ y_2$, wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\mu$. Oblicz jego obciążenie i odchylenie standardowe.

**93** ................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka z informatyką**

**93 ..................** ....................................

*Zadanie* **4. (8 punktów)**

Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ wskaż zbiór otwarty $G \subset R$ spełniający warunki: $\lambda(G) < \epsilon, \quad \mathrm{Cl}\, G = R.$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka z informatyką

**93** .................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka z informatyką**

**93** **..................** ..................................

*Zadanie* **5. (8 punktów)**

Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna w obszarze $V$, oraz koło domknięte ograniczone okręgiem $K$ o środku w punkcie $a$ i promieniu $r$ zawiera się w $V$. Pokaż, że $2\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}\,z = \int_K \frac{f''(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}\,z$ .

**93** .................... ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka nauczycielska**

**94** **..................** ...................................

*Zadanie* **1. (8 punktów)**
Na płaszczyźnie dane są 4 okręgi, każdy z nich jest zewnętrznie styczny do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych. Udowodnij, że środki tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg.

**94** **..................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka nauczycielska**

**94** **..................** ....................................

*Zadanie* **2. (8 punktów)**
Ile dzielników ma liczba 23760 ?

**94** .................. ....................................

**94** .................. ...................................

*Zadanie* **3.** **(8 punktów)**

Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 2, zmienna losowa $Y$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i odchyleniu standardowym 1. Wylosowano niezależnie jedną wartość zmiennej $X$ i dwie wartości zmiennej $Y$. Na podstawie w ten sposób uzyskanych wartości $x_1$, $y_2$, $y_2$, wyznacz estymator największej wiarygodności parametru $\mu$. Oblicz jego obciążenie i odchylenie standardowe.

**94** .................... ...................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka nauczycielska**

**94 ..................** ..................................

*Zadanie* **4. (8 punktów)**

Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ wskaż zbiór otwarty $G \subset R$ spełniający warunki: $\lambda(G) < \epsilon, \quad \mathrm{Cl}\, G = R$.

**94** **..................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka nauczycielska**

**94** **..................** ...................................

*Zadanie* **5. (8 punktów)**

Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna w obszarze $V$, oraz koło domknięte ograniczone okręgiem $K$ o środku w punkcie $a$ i promieniu $r$ zawiera się w $V$. Pokaż, że $2\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}\,z = \int_K \frac{f''(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}\,z$ .

**94** **..................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka teoretyczna**

**95 ..................** ....................................

*Zadanie* **1. (8 punktów)**
Skonstruować ciąg funkcji ciągłych $[0,1] \to R$, zbieżny punktowo do 0 na $[0,1]$, który nie jest jednostajnie zbieżny na żadnym przedziale otwartym.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka teoretyczna

**95** **....................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka teoretyczna**

**95** **..................** ..................................

*Zadanie* **2. (8 punktów)**

Udowodnić, że operatory $P: \quad f \to \Delta f$ (Laplasjan f) oraz $Q: \quad f \to xf(x)$ (mnożenie przez $x$) określone na przestrzeni funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych o nośnikach zwartych w $R$ mają rozszerzenia samosprzężone.

Wskazówka: Użyć transformaty Fouriera. Należy przypomnieć, że jest ona operatorem unitarnym.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka teoretyczna

**95** **....................** ....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka teoretyczna**

**95** **..................** ...................................

*Zadanie* **3. (8 punktów)**

Pokazać, że nie istnieją ograniczone operatory liniowe $P, Q$ na przestrzeni Hilberta takie, że

$$PQ - QP = Id.$$

Wskazówka: Wyprowadzic wzor na $P^n Q - QP^n$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka teoretyczna

**95** ..................... .....................................

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka teoretyczna**

**95** **..................** ....................................

*Zadanie* **4. (8 punktów)**

Dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ wskaż zbiór otwarty $G \subset R$ spełniający warunki: $\lambda(G) < \epsilon, \quad \mathrm{Cl}\, G = R$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka teoretyczna

**95** ………………… ………………………………

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011**
**Matematyka teoretyczna**

**95** **..................** ...................................

*Zadanie* **5. (8 punktów)**

Załóżmy, że $f$ jest holomorficzna w obszarze $V$, oraz koło domknięte ograniczone okręgiem $K$ o środku w punkcie $a$ i promieniu $r$ zawiera się w $V$. Pokaż, że $2\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}\,z = \int_K \frac{f''(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}\,z$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2011
Matematyka teoretyczna

**95** **....................** ....................................