

1. Czy prawdą jest, że

- a)  $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} y^2 > \frac{1}{1+x^2}$  ;
- b)  $\forall y \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R} y^2 > \frac{1}{1+x^2}$  ;
- c)  $\forall x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} y^2 > \frac{1}{1+x^2}$  ;
- d)  $\exists x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} y^2 > \frac{1}{1+x^2}$  ?

2. Czy następująca relacja na zbiorze liczb rzeczywistych jest relacją równoważności?

- a)  $a \sim b \iff a^2 + b^2 \geq 0$  ;
- b)  $a \sim b \iff a^2 + b^2 > 0$  ;
- c)  $a \sim b \iff a \cdot b \geq 0$  ;
- d)  $a \sim b \iff a \cdot b > 0$  .

3. Czy ciąg  $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$  jest zbieżny?

- a)  $a_n = (1/n^2) \sin n^2$  ;
- b)  $a_n = n^2 \sin(1/n^2)$  ;
- c)  $a_n = (1/n^2) \cos n^2$  ;
- d)  $a_n = n^2 \cos(1/n^2)$  .

4. Czy funkcja  $f(x) = |x^2 - 4|(x - 2)|x|(x - 1)$  jest różniczkowalna w punkcie

- a)  $x = 1$  ;
- b)  $x = 0$  ;
- c)  $x = 2$  ;
- d)  $x = -2$  ?

5. Czy całka nieoznaczona  $\int \sin(2x) dx$  jest równa

- a)  $\sin^2 x + C$  ;
- b)  $-(1/2) \cos(2x) + C$  ;
- c)  $-\cos^2 x + C$  ;
- d)  $(1/2) \sin(2x) + C$  ?

6. Niech  $F(y) = \int_y^{2y} \frac{1}{x} dx$ . Czy

- a)  $F(4) > F(1)$  ;
- b)  $F(3) > F(4)$  ;
- c)  $F(1) > F(2)$  ;
- d)  $F(2) > F(3)$  ?

7. Podany niżej ciąg funkcji  $(f_n)_{n=1,2,3,\dots}$  określonych na przedziale  $[-1, 1]$  jest zbieżny jednostajnie. Czy jego granica jest funkcją ciągłą? ( $\operatorname{sgn}(x) = +1$ , jeśli  $x > 0$ ;  $-1$ , jeśli  $x < 0$ ;  $0$ , jeśli  $x = 0$ )

- a)  $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sgn}(x)$  ;
- b)  $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})\operatorname{sgn}(x)$  ;
- c)  $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})(\operatorname{sgn}(x))^2$  ;
- d)  $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})x \operatorname{sgn}(x)$  .

8. Czy funkcja dwóch zmiennych  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$  ma lokalne minimum w  $(x, y) = (0, 0)$ , jeśli

- a)  $a = -4$  ;
- b)  $a = -3$  ;
- c)  $a = 3$  ;
- d)  $a = 1$  ?

9. Czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego  $y''(t) = y(t)$ ?

- a)  $y(t) = e^t + e^{-t}$  ;
- b)  $y(t) = e^{0 \cdot t}$  ;
- c)  $y(t) = e^t$  ;
- d)  $y(t) = e^{-t}$  .

**10.** Suma pewnych trzech liczb zespolonych wynosi  $i$ . Czy wynika stąd, że

- a) przynajmniej jedna z nich ma nieujemną część rzeczywistą ;
- b) ich iloczyn jest niezerowy ;
- c) przynajmniej jedna z nich ma moduł  $\geq 1/3$  ;
- d) jedna z nich jest urojona, a dwie rzeczywiste ?

**11.** Wielomian  $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$  o współczynnikach zespolonych ma wszystkie (zespolone) pierwiastki w kole o środku  $-1000+i$  i promieniu 1. Czy wynika stąd, że

- a)  $\operatorname{Re}(d) > 0$  ;
- b)  $\operatorname{Re}(a) > 0$  ;
- c)  $\operatorname{Re}(b) > 0$  ;
- d)  $\operatorname{Re}(c) > 0$  ?

**12.** Symetryczna macierz  $A$  rozmiaru  $3 \times 3$  o wyrazach rzeczywistych ma dwie rzeczywiste wartości własne. Czy wynika stąd, że istnieją dwa liniowo niezależne wektory własne  $A$

- a) których iloczyn wektorowy też jest wektorem własnym  $A$  ;
- b) których iloczyn skalarny jest niezerowy ;
- c) których iloczyn skalarny jest równy 0 ;
- d) których suma też jest wektorem własnym  $A$  ?

**13.** Wektory  $(2, 1, -3)$  i  $(-1, 4, -3)$  rozpinają dwuwymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni  $\mathbf{R}^3$ . Czy podany wektor należy do tej podprzestrzeni?

- a)  $(1, 2, -3)$  ;
- b)  $(1, 1, -3)$  ;
- c)  $(1, 2, 3)$  ;
- d)  $(-1, 2, -1)$  .

**14.** Czy podana macierz jest odwracalna?

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  ;
- b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  ;
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  ;
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  .

**15.** Czy istnieje nietrywialna grupa, taka że każda para  $a, b$  jej elementów spełnia zależność

- a)  $ab = b^2a$  ;
- b)  $ab = a$  ;
- c)  $ab = ba$  ;
- d)  $ab = b^{-1}a$  ?

**16.** Czy podany wielomian jest elementem nierozkładalnym w pierścieniu  $\mathbf{R}[X]$  wielomianów o współczynnikach rzeczywistych?

- a)  $X^3 + X + 1$  ;
- b)  $X + 1$  ;
- c)  $X^2 - 1$  ;
- d)  $X^2 + 1$  .

**17.** Czy równanie  $x^2 + 1 = 0$  ma rozwiązanie

- a) w ciele  $\mathbf{C}$  liczb zespolonych ;
- b) w ciele trójelementowym ;
- c) w ciele pięcioelementowym ;
- d) w ciele dwuelementowym ?

**18.** Ala wybiera losowo liczbę ( $A$ ) ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (każdą z tym samym prawdopodobieństwem). Niezależnie od niej to samo robi Bartek (wybierając liczbę  $B$ ). Czy

- a)  $P(A - B \text{ jest parzysta}) = 1/2$  ;
- b)  $P(A + B \text{ jest parzysta}) = 1/2$  ;
- c)  $P(A \cdot B \text{ jest parzysta}) = 1/2$  ;
- d)  $P(A > B) = 1/2$  ?

**19.** Bolek wybiera losowo wierzchołek ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 1 (każdy z tym samym prawdopodobieństwem). Niezależnie od niego to samo czyni Lolek. Niech  $D$  będzie odległością wybranych wierzchołków. Czy

- a)  $P(D < 1/6) = 1/6$  ;
- b)  $P(D > 1) = 1/6$  ;
- c)  $E(D) \geq 1$  ;
- d)  $P(D \text{ jest niewymierne}) = P(D = 0)$  ?

**20.** Dziecko układa wieżę z klocków; prawdopodobieństwo, że przy dokładaniu  $n$ -tego klocka wieża nie zawali się, wynosi  $1/n$ . Niech zmienna losowa  $Z$  będzie równa numerowi klocka, przy dokładaniu którego wieża zawala się. Czy jest prawdą, że

- a)  $E(Z) < 3$  ;
- b)  $E(Z) > 2$  ;
- c)  $P(Z > 4) > 1/2$  ;
- d)  $P(Z > 2) > P(Z = 2)$  ?