

1. Czy prawdą jest, że

- a) $\forall n \in \mathbf{Z} \exists x \in \mathbf{R} n + x + 7 = 0$;
- b) $\forall x \in \mathbf{R} \exists n \in \mathbf{Z} n + x + 7 = 0$;
- c) $\exists n \in \mathbf{Z} \exists x \in \mathbf{R} n + x + 7 = 0$;
- d) $\exists n \in \mathbf{Z} \forall x \in \mathbf{R} n + x + 7 = 0$?

2. Czy podana liczba dzieli się przez 7?

- a) 444444 ;
- b) 333333 ;
- c) 222222 ;
- d) 111111 .

3. Czy pole trójkąta o podanych długościach boków jest większe niż 6?

- a) 2, 4, 5 ;
- b) 3, 4, 5 ;
- c) 3, 5, 5 ;
- d) 3, 4, 6 .

4. Czy ciąg $(a_n)_{n=2,3,4,\dots}$ jest ograniczony?

a) $a_n = \frac{e^n}{n}$;

b) $a_n = \frac{n}{\sin n}$;

c) $a_n = \frac{\sin n}{\ln(n)}$;

d) $a_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$.

5. Czy zbieżny jest szereg podwójny

a) $\sum_{n,m=1}^{\infty} 2^{-n-m}$;

b) $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2}$;

c) $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{m+n}$;

d) $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{m+n}{mn}$?

6. Czy podana funkcja jest różniczkowalna w zerze?

a) $f(x) = |1 + x|$;

b) $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$;

c) $f(x) = x|x|$;

d) $f(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$.

7. Funkcja $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ma dokładnie dwa lokalne ekstrema: lokalne maksimum w $(1, 0)$ (z wartością 2) i lokalne minimum w $(-1, 0)$ (z wartością -2). Czy granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0)$ może być równa

- a) 4 ;
- b) 2 ;
- c) -2 ;
- d) 0 ?

8. Czy zbieżna jest całka

- a) $\int_1^\infty \sqrt{x} \sin(x^2) dx$;
- b) $\int_1^\infty \sin(x^2) dx$;
- c) $\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x} dx$;
- d) $\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$?

9. Czy szereg $\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^n$ jest zbieżny, jeśli

- a) $z^3 = 5 + 6i$;
- b) $z^3 = 7 - 4i$;
- c) $z^3 = -2 + 5i$;
- d) $z^3 = 1 + i$?

10. Czy istnieje liczba zespolona z , taka że

- a) $2z^6 - 1 = z^6 - 1$;
- b) $3z^7 + z + 1 = 2z^4 + 1$;
- c) $z^4 + 1 = 0$;
- d) $z^6 + z^4 + z^2 = z^5 + z^3 + z$?

11. Macierz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$ jest symetryczna, a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest jej wektorem własnym. Czy wynika stąd, że

- a) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A ;
- b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A ;
- c) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A ;
- d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A ?

12. Liczby 1 i 2 są wartościami własnymi macierzy $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$, a także macierzy $B \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$. Czy wynika stąd, że macierze A i B

- a) mają ten sam ślad ;
- b) są symetryczne ;
- c) mają te same wektory własne ;
- d) mają ten sam wyznacznik ?

13. Iloczyn pewnych dwóch macierzy rozmiaru 7×7 o wyrazach rzeczywistych jest macierzą zerową. Czy wynika stąd, że

- a) przynajmniej jedna z nich jest macierzą zerową ;
- b) przynajmniej jedna z nich ma rząd 0 ;
- c) przynajmniej jedna z nich ma wyznacznik 0 ;
- d) przynajmniej jedna z nich ma zerową kolumnę ?

14. Czy wyznacznik podanej macierzy jest równy 0?

- a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$;
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 12 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

15. Czy w grupie S_n (permutacji n elementów) istnieje element rzędu 6, jeśli

- a) $n = 4$;
- b) $n = 7$;
- c) $n = 5$;
- d) $n = 6$?

16. Czy w pierścieniu $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb jako działaniami)

- a) są niezerowe elementy, które nie są dzielnikami zera ;
- b) istnieją elementy nieodwracalne ;
- c) istnieją elementy odwracalne ;
- d) są dzielniki zera ?

17. Liczba $p = 2^{43112609} - 1$ jest liczbą pierwszą. Czy jest prawdą, że w ciele reszt modulo p każdy niezerowy element

- a) jest odwracalny ;
- b) w pewnej potędze o wykładniku > 1 daje siebie ;
- c) jest odwrotny sam do siebie ;
- d) w pewnej potędze daje 1 ?

18. Rzucono dwoma kostkami, ośmiościenną (ze ścianami ponumerowanymi od 1 do 8) i dwunastościenną (ze ścianami ponumerowanymi od 1 do 12). Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb które wypadły wynosi n . Czy

- a) $p_9 = p_{13}$;
- b) $p_9 = p_{12}$;
- c) $p_9 = p_{14}$;
- d) $p_9 = p_{11}$?

19. Pewien prestidigitator ma 8 kapeluszy: 5 z królikami i 3 puste. Kapelusze ponumerowano od 1 do 8, przy czym numery od 1 do 5 przypadły tym z królikami. Następnie wybrano losowo jeden kapelusz. Niech K oznacza zdarzenie: “w wybranym kapeluszu jest królik”. Niech P oznacza zdarzenie: “wybrany kapelusz ma parzysty numer”. Niech N oznacza zdarzenie: “wybrany kapelusz ma nieparzysty numer”. Czy

- a) $\mathbf{P}(K) = \mathbf{P}(N | K) + \mathbf{P}(P | K)$;
- b) $\mathbf{P}(K) = \mathbf{P}(K | N) + \mathbf{P}(K | P)$;
- c) $\mathbf{P}(N | K) = \mathbf{P}(P | K)$;
- d) $\mathbf{P}(K | N) = \mathbf{P}(K | P)$?

20. Rzucono monetą n razy; niech E_n oznacza wartość oczekiwaną liczby początkowych rzutów w których wypadły same orły. Czy ciąg (E_n) jest

- a) rosnący ;
- b) ograniczony ;
- c) zbieżny ;
- d) ciągiem arytmetycznym ?