

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

Zadanie **1.** (8 punktów)

Założmy, że w diploidalnej populacji, dla której zachodzi prawo Hardy'ego-Weinberga dla loci o dwóch allelach A i a proporcja osobników o genotypie AA wynosi Q .

(a) Jaka część osobników tej populacji ma genotyp Aa ?

(b) Założmy, że wszystkie osobniki tej populacji o genotypie aa zostały z niej usunięte. Jaka będzie częstość allelu a w tak powstałej populacji ?

(c) Przy założeniu, że populacja z punktu (b) będzie kojarzyła się w sposób losowy, jaka będzie częstość osobników o genotypach odpowiednio AA , Aa oraz aa w populacji potomnej ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

Zadanie **2.** (8 punktów)

Liczebność pewnej populacji jest opisana równaniem

$$N_{n+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}, \quad (1)$$

w którym N_t oznacza liczebność populacji w n -tej generacji a r i K są dodatnimi stałymi.

- (a) Znajdź rozwiązania stacjonarne równania (1).
- (b) Zbadaj stabilność znalezionych w punkcie (a) rozwiązań.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono 100 par wartości (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Estymatory próbkowe średniej i odchylenia standardowego są równe $\bar{x} = 170, \bar{y} = 80, s_x = 10, s_y = 5$. Na podstawie obserwacji (x_i, y_i) wyznaczono estymatory parametrów regresji y względem x . Oznaczmy przez b estymator współczynnika kierunkowego, przez a - estymator wyrazu wolnego. Wypisz, które z wartości b i a *nie mogą* być wartościami estymatorów współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego:

b	-0.3	1	2
a	-10	20	150

- Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech A będzie ograniczonym zbiorem w przestrzeni metrycznej. Pokaż,
że

$$\text{Cl}(A) = A.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

Zadanie **5.** (8 punktów)

Sprawdź, czy dla normy w $C[0, 1]$ zadanej wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Biomatematyka

90

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **1.** (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza HU oraz

$l_{40} = 520, l_{50} = 430, l_{51} = 425, l_{52} = 420.$

a) Obliczyć ${}_{10|1.5}q_{40}$.

b) Wyznaczyć JSN dla portfela ubezpieczeniowego dla 40-latka, w którym jeśli śmierć nastąpi w pierwszych 10 latach ubezpieczenia, to wypłata w dziesiątą rocznicę umowy wynosi 10. Jeśli ubezpieczony przeżyje 11 rok, to wypłacana jest kwota 100 w jedenastą rocznicę umowy. Przyjąć stopę procentową $i = 0\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dana jest macierz wypłat dwuosobowej gry o sumie zero:

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & \alpha & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

- a) Ustal, dla jakich wartości parametru α gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych, a dla jakich w zbiorze strategii mieszanych.
- b) Rozwiąż grę dla $\alpha = 0$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono 100 par wartości (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Estymatory próbkowe średniej i odchylenia standardowego są równe $\bar{x} = 170, \bar{y} = 80, s_x = 10, s_y = 5$. Na podstawie obserwacji (x_i, y_i) wyznaczono estymatory parametrów regresji y względem x . Oznaczmy przez b estymator współczynnika kierunkowego, przez a - estymator wyrazu wolnego. Wypisz, które z wartości b i a *nie mogą* być wartościami estymatorów współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego:

b	-0.3	1	2
a	-10	20	150

- Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech A będzie ograniczonym zbiorem w przestrzeni metrycznej. Pokaż,
że

$$\text{Cl}(A) = A.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

Zadanie **5.** (8 punktów)

Sprawdź, czy dla normy w $C[0, 1]$ zadanej wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

91

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **1**. (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza HU oraz

$$l_{40} = 520, l_{50} = 430, l_{51} = 425, l_{52} = 420.$$

a) Obliczyć ${}_{10|1.5}q_{40}$.

b) Wyznaczyć JSN dla portfela ubezpieczeniowego dla 40-latka, w którym jeśli śmierć nastąpi w pierwszych 10 latach ubezpieczenia, to wypłata w dziesiątą rocznicę umowy wynosi 10. Jeśli ubezpieczony przeżyje 11 rok, to wypłacana jest kwota 100 w jedenastą rocznicę umowy. Przyjąć stopę procentową $i = 0\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dana jest macierz wypłat dwuosobowej gry o sumie zero:

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & \alpha & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

- a) Ustal, dla jakich wartości parametru α gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych, a dla jakich w zbiorze strategii mieszanych.
- b) Rozwiąż grę dla $\alpha = 0$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono 100 par wartości (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Estymatory próbkowe średniej i odchylenia standardowego są równe $\bar{x} = 170, \bar{y} = 80, s_x = 10, s_y = 5$. Na podstawie obserwacji (x_i, y_i) wyznaczono estymatory parametrów regresji y względem x . Oznaczmy przez b estymator współczynnika kierunkowego, przez a - estymator wyrazu wolnego. Wypisz, które z wartości b i a *nie mogą* być wartościami estymatorów współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego:

b	-0.3	1	2
a	-10	20	150

- Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech A będzie ograniczonym zbiorem w przestrzeni metrycznej. Pokaż,
że

$$\text{Cl}(A) = A.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

Zadanie **5.** (8 punktów)

Sprawdź, czy dla normy w $C[0, 1]$ zadanej wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **1**. (8 punktów)

Wyznaczyć zera wielomianu Czebyszewa:

$$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
char M[] = "matematyka_z_informatyka";

char *f(char *ws, char c)
{
    for( ; *ws ; ++ws)
    {
        if( *ws==c )
            return ws;
    }
    return NULL;
}

int main()
{
    char *ws,n;

    for(n=0,ws=f(M,'m'); ws!=NULL; ws=f(++ws,'a'))
        printf("%2i\n", (++n,ws-M));
    printf("\nn: %2i\n",n);
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Narysować schemat blokowy programu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono 100 par wartości (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Estymatory próbkowe średniej i odchylenia standardowego są równe $\bar{x} = 170, \bar{y} = 80, s_x = 10, s_y = 5$. Na podstawie obserwacji (x_i, y_i) wyznaczono estymatory parametrów regresji y względem x . Oznaczmy przez b estymator współczynnika kierunkowego, przez a - estymator wyrazu wolnego. Wypisz, które z wartości b i a *nie mogą* być wartościami estymatorów współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego:

b	-0.3	1	2
a	-10	20	150

- Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech A będzie ograniczonym zbiorem w przestrzeni metrycznej. Pokaż,
że

$$\text{Cl}(A) = A.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

Zadanie **5.** (8 punktów)

Sprawdź, czy dla normy w $C[0, 1]$ zadanej wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka z informatyką

93

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **1.** (8 punktów)

Znaleźć resztę z dzielenia liczby 2^{92} przez 11.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **2.** (8 punktów)

Udowodnić, że wszystkie trzy symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono 100 par wartości (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 100$. Estymatory próbkowe średniej i odchylenia standardowego są równe $\bar{x} = 170, \bar{y} = 80, s_x = 10, s_y = 5$. Na podstawie obserwacji (x_i, y_i) wyznaczono estymatory parametrów regresji y względem x . Oznaczmy przez b estymator współczynnika kierunkowego, przez a - estymator wyrazu wolnego. Wypisz, które z wartości b i a *nie mogą* być wartościami estymatorów współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego:

b	-0.3	1	2
a	-10	20	150

- Odpowiedź uzasadnij.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech A będzie ograniczonym zbiorem w przestrzeni metrycznej. Pokaż,
że

$$\text{Cl}(A) = A.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

Zadanie **5.** (8 punktów)

Sprawdź, czy dla normy w $C[0, 1]$ zadanej wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka nauczycielska

94

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

Zadanie **1.** (8 punktów)

Sformułować ogólną metodę rozwiązywania równań rekurencyjnych:

$$f(n+k) = a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + \dots + a_k f(n+k-1),$$

gdzie dane są współczynniki zespolone a_0, a_1, \dots, a_{k-1} oraz zadane są $f(0), \dots, f(k-1)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

Zadanie **2.** (8 punktów)

Na przestrzeni l^2 definiujemy operator

$$T(\{a_1, a_2, \dots\}) = \{b_1 a_2, b_2 a_3, \dots\},$$

gdzie współczynniki b_i spełniają oszacowanie $|b_i| \leq 1$.

Czy T jest zwarty? Policzyć spektrum T . Czy obraz T jest całym l^2 ?
Czy istnieje operator zwarty na l^2 taki, że jego obraz jest całym l^2 ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech r_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych przyjmujących wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ każdą z prawdopodobieństwem 1. Rozważmy losowy szereg Taylora

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n.$$

Pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje granica $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x)$ i obliczyć ją.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech A będzie ograniczonym zbiorem w przestrzeni metrycznej. Pokaż,
że

$$\text{Cl}(A) = A.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95

Zadanie **5.** (8 punktów)

Sprawdź, czy dla normy w $C[0, 1]$ zadanej wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$$

istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 24.09.2010
Matematyka teoretyczna

95