

1. Czy implikacja

$$(x = 2 \vee x = 3) \Rightarrow (x^2 = 4)$$

jest prawdziwa dla

- a)  $x = 2$  ;
- b)  $x = -2$  ;
- c)  $x = 3$  ;
- d)  $x = 0$  ?

2. Średnia arytmetyczna pewnych trzech liczb rzeczywistych jest równa 7. Czy wynika stąd, że

- a) jeśli wszystkie są dodatnie, to wszystkie są mniejsze niż 20 ;
- b) jeśli jedna z nich jest  $> 100$ , to jedna z nich jest  $< -93$  ;
- c) ich iloczyn jest nieujemny ;
- d) jeśli jedna z nich jest  $< -1$ , to jedna z nich jest  $> 10$  ?

3. Czy ciąg  $(a_n)$  ma granicę?

- a)  $a_n = (-1)^n \operatorname{tg}(\pi n)$  ;
- b)  $a_n = (-1)^n \sin(\pi n)$  ;
- c)  $a_n = (-1)^n \cos(\pi n)$  ;
- d)  $a_n = \frac{(-1)^n}{\cos(\pi n)}$  .

4. Czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^p$  jest zbieżny dla

- a)  $p = 1/2$  ;
- b)  $p = 2$  ;
- c)  $p = 10$  ;
- d)  $p = 1$  ?

5. Czy funkcja dwóch zmiennych określona podanym wzorem dla  $(x, y) \neq (0, 0)$  ma granicę w punkcie  $(0, 0)$ ?

- a)  $\frac{x^2}{x^2+y^2}$  ;
- b)  $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$  ;
- c)  $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$  ;
- d)  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  .

6. Funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  zadana wielomianem stopnia 3 ma lokalne maksimum w  $x = -1$  i lokalne minimum w  $x = 2$ . Czy wynika stąd, że

- a)  $f$  ma 3 różne pierwiastki rzeczywiste ;
- b)  $f(0) > f(1)$  ;
- c)  $f''(1/2) = 0$  ;
- d)  $f'(0) > 0$  ?

18. Losowo wybrano punkt  $P$  z przedziału  $[0, R]$  na osi  $OX$  (z rozkładem jednostajnym). Niech  $E_R$  oznacza wartość oczekiwaną odległości  $P$  od punktu  $(0, 1)$  leżącego na osi  $OY$ . Czy

- a)  $\lim_{R \rightarrow +\infty} E_R = R/2$  ;
- b)  $E_{100} < 51$  ;
- c)  $E_{2R} = 2E_R$  ;
- d)  $E_8 > 4$  ?

19. Czy podany wzór jest tożsamościowo prawdziwy?

- a)  $P(A | B) \cdot P(B | A) = 1$  ;
- b)  $P(A \cap B | A) = P(A \cap B | B)$  ;
- c)  $P(A | B) = P(B | A)$  ;
- d)  $P(A | B) + P(B | A) = 1$  .

20. W  $n$ -kącie foremnym ( $n \geq 4$ ) wybieramy losowo uporządkowaną czwórkę parami różnych wierzchołków  $(A, B, C, D)$  (każdą z tym samym prawdopodobieństwem). Niech  $p_n$  oznacza prawdopodobieństwo, że odcinki  $AC$  i  $BD$  przecinają się. Czy

- a) ciąg  $(p_n)$  ma granicę ;
- b)  $p_4 = 1/2$  ;
- c)  $p_5 = p_7$  ;
- d)  $p_8 > p_9$  ?

15. Czy istnieje nieprzemienne grupa rzędu

- a) 6 ;
- b) 7 ;
- c) 4 ;
- d) 5 ?

16. Czy w pierścieniu  $R = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbf{Z}\}$  (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb jako działaniami)

- a) element  $2 + \sqrt{3}$  jest odwracalny ;
- b) element  $2 - \sqrt{3}$  jest dzielnikiem zera ;
- c) element  $2 + \sqrt{3}$  jest dzielnikiem zera ;
- d) element  $2 - \sqrt{3}$  jest odwracalny ?

17. Czy zbiór  $\{a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 : a, b, c, d \in \mathbf{Q}\}$  jest podciałem ciała liczb rzeczywistych dla

- a)  $\xi = \sqrt[4]{2}$  ;
- b)  $\xi = \sqrt{2}$  ;
- c)  $\xi = \sqrt[5]{2}$  ;
- d)  $\xi = \sqrt[3]{2}$  ?

7. Niech  $f(x) = \int_0^x (t^2 + x^2) dt$ . Czy

- a)  $f'(2) = f'(-2)$  ;
- b)  $f'(-1) = 0$  ;
- c)  $f'(2) = 4f'(1)$  ;
- d)  $f'(0) = 0$  ?

8. Czy możliwe jest, by ściśle wypukła funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

- a) przyjmowała jedynie ujemne wartości ;
- b) miała jednocześnie skończone granice w  $+\infty$  i w  $-\infty$  ;
- c) miała skończoną granicę w  $-\infty$  ;
- d) miała skończoną granicę w  $+\infty$  ?

9. Liczba zespolona  $z$  leży na okręgu  $|z - (2 + 2i)| = 1$ . Czy wynika stąd, że

- a)  $\operatorname{Re}(z^2) > 0$  ;
- b)  $\operatorname{Re}(z) > 0$  ;
- c)  $\operatorname{Im}(z^2) > 0$  ;
- d)  $\operatorname{Im}(z) > 0$  ?

**10.** Niech  $A = \{z \in \mathbf{C} : z^6 = z^{10} = 1\}$ . Czy jest prawdą, że

- a) każdy element  $A$  spełnia równanie  $z^{60} = 1$  ;
- b)  $A$  ma 60 elementów ;
- c) każdy element  $A$  spełnia równanie  $z^{15} = 1$  ;
- d) każdy element  $A$  spełnia równanie  $z^2 = 1$  ?

**11.** Macierz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  jest symetryczna, a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  jest jej wektorem własnym. Czy wynika stąd, że

- a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  jest wektorem własnym  $A$  ;
- b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  jest wektorem własnym  $A$  ;
- c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  jest wektorem własnym  $A$  ;
- d)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  jest wektorem własnym  $A$  ?

**12.** Czy podana macierz ma przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną?

- a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ;
- b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ;
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  ;
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  .

**13.** O macierzach  $A, B \in M_{5 \times 5}(\mathbf{R})$  wiadomo, że obie mają rząd 3. Czy

- a)  $AB$  może mieć rząd 1 ;
- b)  $A + B$  może mieć rząd 5 ;
- c)  $AB$  może mieć rząd 4 ;
- d)  $A + B$  musi mieć rząd  $\geq 3$  ?

**14.** Czy podana forma kwadratowa jest dodatnio określona?

- a)  $x^2 + xy + y^2$  ;
- b)  $x^2 - 4xy + y^2$  ;
- c)  $x^2 + 4xy + y^2$  ;
- d)  $x^2 - xy + y^2$  .