1. (3 pkt.) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = xy$ na zbiorze A zadanym nierównością $2x^2 + y^2 \leq 1$, oraz znajdź wszystkie punkty zbioru A w których owe wartości są przyjmowane.

2. (4 pkt.) Przez środek kuli o promieniu $2a$ wywiercono walcowatą dziurę o promieniu a. Oblicz objętość pozostałej bryły.

[Bardziej matematycznie: z kuli w $\mathbf{R}^3$ o środku w $(0, 0, 0)$ i promieniu $2a$ usunięto te punkty, których odległość od osi OZ jest mniejsza niż a. Oblicz objętość pozostałej bryły.]

3. (3 pkt.) Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$ty'(t) + y(t) = 2t, \qquad y(1) = 2.$$

4. (3 pkt.) Podaj (z uzasadnieniem) przykład macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ spełniającej równocześnie następujące warunki:

- każdy wektor własny A leży na prostej o równaniu $x + y = 0$;
- liczba 2 jest jedyną wartością własną macierzy A.

5. (4 pkt.) Niech $G = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}) : \det A \neq 0\}$. Zbiór G z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę.

a) Udowodnij, że $H = \{A \in G : \det A = 1\}$ jest dzielnikiem normalnym grupy G.

b) Udowodnij, że $W = \{A \in G : \det A = 2\}$ jest warstwą podgrupy H w grupie G.

6. (3 pkt.) Pokaż, że jeżeli zdarzenia A, B, C są niezależne, to

a) A i $B \cap C$ są niezależne;

b) A i $B \cup C$ są niezależne.