

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **1**. (8 punktów)

Założmy, że w diploidalnej populacji kojarzącej się w sposób losowy, w loci o dwóch allelach A i a 36% osobników tej populacji ma genotyp aa .

- (a) Jaka część osobników tej populacji ma genotyp AA ?
- (b) Założmy, że wszystkie osobniki tej populacji o genotypie AA zostały z niej usunięte. Jaka będzie częstość allelu a w tak powstałej populacji ?
- (c) Przy założeniu, że populacja z punktu (b) będzie kojarzyła się w sposób losowy, jaka będzie częstość osobników o genotypach odpowiednio AA , Aa oraz aa w populacji potomnej ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **2.** (8 punktów)

Za/ożmy, że w diploidalnej populacji, która kojarzy się w sposób losowy względne dostosowania genotypów AA , Aa , i aa są w stosunku $1 : 1 - s : 1$.

- (a) Oblicz częstość allelu a w następnej generacji zakładając, że w obecnej populacji występuje on z częstością p .
- (b) Jeśli dodatkowo założymy, że częstości mutacji $A \rightarrow a$ oraz $a \rightarrow A$ są takie same i wynoszą μ to jaka będzie częstość allelu A w następnej generacji ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono niezależnie długości dwóch prętów. Wyniki pomiarów wyniosły 20mm i 17mm. Załóż, że oba pomiary mają rozkład normalny o rozkładach $N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2$.

- a) Wyznacz kwadrat, zawierający nieznaną punkt (μ_1, μ_2) z prawdopodobieństwem 0.95 (czyli kwadrat ufności na poziomie ufności 0.95).
- b) Uzasadnij, że na poziomie ufności 0.95 możliwe jest przyjęcie hipotezy, że $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.
- c) Znajdź przedział ufności dla μ_0 na poziomie 0.95.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest metryką. Zdefiniujmy funkcję $\rho(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$. Czy ρ jest metryką na zbiorze X ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **1.** (8 punktów)

Założmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = \frac{100-x}{100}$, dla $0 \leq x \leq 100$ oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP) i hipoteza jednostajności (HU).

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że 30-latek umrze w ciągu najbliższych 2,5 lat życia.
- b) Obliczyć JSN dla następującego pakietu rentowo-ubezpieczeniowego (20)-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 20, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 200. Jeśli umarł w drugim roku trwania ubezpieczenia, wypłata w drugą rocznicę zawarcia umowy wynosi 200. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dana jest macierz wypłat dwuosobowej gry o sumie zero:

$$M = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 2 & \alpha & 4 \\ 3 & -10 & 3 \end{vmatrix}.$$

- a) Ustal, dla jakich wartości parametru α gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych. Znajdź to rozwiązanie.
- b) Rozwiąż grę dla $\alpha = 4$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono niezależnie długości dwóch prętów. Wyniki pomiarów wyniosły 20mm i 17mm . Załóż, że oba pomiary mają rozkład normalny o rozkładach $N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2$.

- a) Wyznacz kwadrat, zawierający nieznaną punkt (μ_1, μ_2) z prawdopodobieństwem 0.95 (czyli kwadrat ufności na poziomie ufności 0.95).
- b) Uzasadnij, że na poziomie ufności 0.95 możliwe jest przyjęcie hipotezy, że $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.
- c) Znajdź przedział ufności dla μ_0 na poziomie 0.95.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest metryką. Zdefiniujmy funkcję $\rho(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$. Czy ρ jest metryką na zbiorze X ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **1**. (8 punktów)

Czy ciąg $(x_n, y_n) \in R^2$ zadany wzorem

$$\begin{aligned} 2x_{n+1} + y_n &= 3, \\ -x_n - 2y_{n+1} &= -3, \end{aligned}$$

dla $n = 0, 1, \dots$ i dowolnego $(x_0, y_0) \in R^2$ jest zbieżny? Odpowiedź uzasadnić oraz obliczyć granicę.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
int g(int a, int b)
{
    if(!a || !b)

return (a<b ? b : a);
    if( a<b )
        return g(a, b-a);

return g(a-b, b);
}

int main()
{
    int a,b;

    a = 10;
    b = 6;

printf("g(%i,%i): %i\n",a, b, g(a, b));
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Niech $c = g(a, b)$ będzie funkcją z programu.

Czy istnieją liczby całkowite x, y o własności: $10x + 6y = g(10, 6)$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono niezależnie długości dwóch prętów. Wyniki pomiarów wyniosły 20mm i 17mm . Załóż, że oba pomiary mają rozkład normalny o rozkładach $N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2$.

- a) Wyznacz kwadrat, zawierający nieznaną punkt (μ_1, μ_2) z prawdopodobieństwem 0.95 (czyli kwadrat ufności na poziomie ufności 0.95).
- b) Uzasadnij, że na poziomie ufności 0.95 możliwe jest przyjęcie hipotezy, że $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.
- c) Znajdź przedział ufności dla μ_0 na poziomie 0.95.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest metryką. Zdefiniujmy funkcję $\rho(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$. Czy ρ jest metryką na zbiorze X ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **1.** (8 punktów)

Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$2x + 7y = 10$$

w liczbach całkowitych. Czy istnieją rozwiązania w liczbach naturalnych ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **2.** (8 punktów)

Wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu, a S jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD . Udowodnić, że $AS \cdot CS = BS \cdot DS$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **3.** (8 punktów)

Zmierzono niezależnie długości dwóch prętów. Wyniki pomiarów wyniosły 20mm i 17mm . Załóż, że oba pomiary mają rozkład normalny o rozkładach $N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2$.

- a) Wyznacz kwadrat, zawierający nieznaną punkt (μ_1, μ_2) z prawdopodobieństwem 0.95 (czyli kwadrat ufności na poziomie ufności 0.95).
- b) Uzasadnij, że na poziomie ufności 0.95 możliwe jest przyjęcie hipotezy, że $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.
- c) Znajdź przedział ufności dla μ_0 na poziomie 0.95.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest metryką. Zdefiniujmy funkcję $\rho(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$. Czy ρ jest metryką na zbiorze X ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech dany będzie ciąg kul o promieniach X_1, X_2, \dots , będących jednakowo rozłożonymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[1, 3]$. Oznaczmy objętości tych kul przez V_1, V_2, \dots odpowiednio.

a) Zbadać zbieżność

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+2010} V_i}{\sum_{i=1}^n X_i},$$

gdy $n \rightarrow \infty$.

b) Oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna objętość 1000 kul przewyższy objętość kuli o promieniu 20.

Odpowiedzi uzasadnić.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znajdź $EX(t)$, $R(t, s) = \text{Cov}(X(t), X(s))$ oraz rozkłady skończenie wymiarowe procesu: $X(t) = \mathbf{I}_{\{t \leq U\}}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ będzie próbą losową z rozkładu $U(\theta, \theta + 2)$, $\theta \in R$. Wyznacz minimalną statystykę dostateczną dla parametru θ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest metryką. Zdefiniujmy funkcję $\rho(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$. Czy ρ jest metryką na zbiorze X ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **1.** (8 punktów)

Jaki jest stopień liczby algebraicznej $2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}$?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$. Udowodnij, że f jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy $f^{(2)}(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **3.** (8 punktów)

Rozważmy dwa zbiory Cantora: klasyczny trójkowy oraz piątkowy otrzymany w ten sposób, że za każdym krokiem konstrukcji dzielimy odcinek na 5 równych odcinków i wyrzucamy środkowy. Skonstruować homeomorfizm h pomiędzy tymi zbiorami. Czy h i h^{-1} mogą oba spełniać warunek Lipschitza ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **4.** (8 punktów)

Założmy, że $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest metryką. Zdefiniujmy funkcję $\rho(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$. Czy ρ jest metryką na zbiorze X ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **5.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 30.06.2010
Matematyka teoretyczna

85