

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **1.** (8 punktów)

Liczebność pewnej populacji jest opisana równaniem

$$N_{n+1} = \frac{\lambda N_n^{1-b}}{\alpha}, \quad (1)$$

w którym N_t oznacza liczebność populacji w n -tej generacji a α, b i λ są dodatnimi stałymi.

- (a) Znajdź rozwiązania stacjonarne powyższego równania.
- (b) Zbadaj stabilność znalezionych w punkcie (a) rozwiązań.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **2.** (8 punktów)

Po przeprowadzeniu eksperymentu genetyk stwierdził, że fragment nici DNA złożony z 20 zasad

CTAG GCGA TTAT CCAA ATGC,

w wyniku mutacji punktowych przybrał postać

*CTA*C *GCGA* CA*AT* *CC*T*A* T*TG*T.

Genetyk założył, że nukleotydy w różnych miejscach nici podlegają mutacji w sposób niezależny i zgodny z tym samym dyskretnym modelem Jukesa-Cantora.

- (a) Jaką macierz prawdopodobieństw mutacji otrzymał na podstawie danych i przyjętych założeń ?
- (b) Jakiej częstości poszczególnych nukleotydów może oczekiwać genetyk na podstawie otrzymanego w punkcie (b) modelu mutacji, gdyby proces mutacji przebiegał dostatecznie długo ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwa pręty, dłuższy i krótszy, zmierzono w następujący sposób: najpierw ustawiono je jeden za drugim (szeregowo) i zmierzono ich łączną długość, równą 20 mm; potem zestawiono je obok siebie (równolegle) z wyrównanym początkiem i zmierzono różnicę ich długości, równą 4 mm. Załóż, że:

- oba pomiary są niezależne,
- mają rozkład normalny,
- pomiar szeregowy ma odchylenie standardowe $\sigma = 2mm$,
- pomiar równoległy ma odchylenie standardowe $\sigma = 1mm$.

a) Oblicz odchylenie standardowe estymatora największej wiarygodności długości dłuższego pręta.

b) Podaj wartość tego estymatora dla podanych wyników pomiaru.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **4.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{\{z:|z-2-i|^2<\sqrt{2}\}} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

Zadanie **5.** (8 punktów)

Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że jeśli mamy ciąg zbiorów $A_n \in \Sigma$ taki, że $A_n \subseteq A_{n+1}$, to $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **1.** (8 punktów)

Dana jest macierz wypłat dwuosobowej gry o sumie zero:

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ \alpha & 3 & 3 \\ -5 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

- a) Ustal, dla jakich wartości parametru α gra ta ma punkt siodłowy. Wyznacz ten punkt oraz podaj wartość gry.
- b) Rozwiąż grę dla $\alpha = 5$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem: $s(x) = P(T > x) = 1 - \frac{x}{90}$ dla $x \in [0, 90]$ oraz że zachodzi hipoteza jednostajności (HU) i hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

- 1) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że 30-latek umrze pomiędzy 40,5 i 50,5 rokiem życia.
- 2) Wyznaczyć JSN dla czystego ubezpieczenia na dożycie na 10 lat dla osoby w wieku 40 lat. Przyjąć stopę procentową $i = 0\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwa pręty, dłuższy i krótszy, zmierzono w następujący sposób: najpierw ustawiono je jeden za drugim (szeregowo) i zmierzono ich łączną długość, równą 20 mm; potem zestawiono je obok siebie (równolegle) z wyrównanym początkiem i zmierzono różnicę ich długości, równą 4 mm. Załóż, że:

- oba pomiary są niezależne,
- mają rozkład normalny,
- pomiar szeregowy ma odchylenie standardowe $\sigma = 2mm$,
- pomiar równoległy ma odchylenie standardowe $\sigma = 1mm$.

a) Oblicz odchylenie standardowe estymatora największej wiarygodności długości dłuższego pręta.

b) Podaj wartość tego estymatora dla podanych wyników pomiaru.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **4.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{\{z:|z-2-i|^2<\sqrt{2}\}} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **5.** (8 punktów)

Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że jeśli mamy ciąg zbiorów $A_n \in \Sigma$ taki, że $A_n \subseteq A_{n+1}$, to $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozkład Choleskiego. Wyznaczyć macierz L spełniającą:

$$LL^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{bmatrix},$$

gdzie L jest macierzą dolnotrójkątną.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
int f(int a, int p)
{
    int r;

    for(r=1; (a*r-1)%p; ++r)
        ;
    return r;
}

int main()
{
    int x;

    for(x=1; x<7; ++x)
        printf("%2i: %2i\n", x, f(x,7));
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. W jaki sposób uzyskany wynik można otrzymać przy pomocy „*rozszerzonego algorytmu Euklidesa*” ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwa pręty, dłuższy i krótszy, zmierzono w następujący sposób: najpierw ustawiono je jeden za drugim (szeregowo) i zmierzono ich łączną długość, równą 20 mm; potem zestawiono je obok siebie (równolegle) z wyrównanym początkiem i zmierzono różnicę ich długości, równą 4 mm. Załóż, że:

- oba pomiary są niezależne,
- mają rozkład normalny,
- pomiar szeregowy ma odchylenie standardowe $\sigma = 2mm$,
- pomiar równoległy ma odchylenie standardowe $\sigma = 1mm$.

a) Oblicz odchylenie standardowe estymatora największej wiarygodności długości dłuższego pręta.

b) Podaj wartość tego estymatora dla podanych wyników pomiaru.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **4.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{\{z:|z-2-i|^2<\sqrt{2}\}} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **5.** (8 punktów)

Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że jeśli mamy ciąg zbiorów $A_n \in \Sigma$ taki, że $A_n \subseteq A_{n+1}$, to $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **1.** (8 punktów)

Udowodnić, że dla każdego naturalnego n wielomian

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$$

jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **2.** (8 punktów)

W trójkącie ABC połączono wierzchołek B z punktem D położonym na boku AC . Wykazać, że $AB + BC - AC < 2BD$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **3.** (8 punktów)

Dwa pręty, dłuższy i krótszy, zmierzono w następujący sposób: najpierw ustawiono je jeden za drugim (szeregowo) i zmierzono ich łączną długość, równą 20 mm; potem zestawiono je obok siebie (równolegle) z wyrównanym początkiem i zmierzono różnicę ich długości, równą 4 mm. Załóż, że:

- oba pomiary są niezależne,
- mają rozkład normalny,
- pomiar szeregowy ma odchylenie standardowe $\sigma = 2mm$,
- pomiar równoległy ma odchylenie standardowe $\sigma = 1mm$.

a) Oblicz odchylenie standardowe estymatora największej wiarygodności długości dłuższego pręta.

b) Podaj wartość tego estymatora dla podanych wyników pomiaru.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **4.** (8 punktów)

Oblicz całkę $\int_{\{z:|z-2-i|^2<\sqrt{2}\}} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **5.** (8 punktów)

Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Pokaż, że jeśli mamy ciąg zbiorów $A_n \in \Sigma$ taki, że $A_n \subseteq A_{n+1}$, to $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18.02.2010
Matematyka nauczycielska

83