Wersja testu **A** 16 lutego 2010 r.

1. Czy jest prawdą, że

a) $\forall_{x \in \mathbf{R}} \exists_{y \in \mathbf{R}} \exists_{z \in \mathbf{R}} \quad xy + yz + 1 = 0$;

b) $\forall_{x \in \mathbf{R}} \exists_{y \in \mathbf{R}} \exists_{z \in \mathbf{R}} \quad xy + yz + 1 \neq 0$;

c) $\exists_{x \in \mathbf{R}} \exists_{y \in \mathbf{R}} \forall_{z \in \mathbf{R}} \quad xy + yz + 1 = 0$;

d) $\exists_{x \in \mathbf{R}} \exists_{y \in \mathbf{R}} \forall_{z \in \mathbf{R}} \quad xy + yz + 1 \neq 0$?

2. Czy jest prawdziwa nierówność

a) $\operatorname{ctg} 1 > 1$;

b) $\operatorname{tg} 1 < \cos 1$;

c) $\cos 1 < \sin 1$;

d) $\sin 1 > \operatorname{tg} 1$?

3. Ograniczony ciąg liczb rzeczywistych (a_n) spełnia warunek $\forall_n \exists_m (a_n > a_m)$. Czy wynika stąd, że

a) $\forall_m (a_m > \liminf_{n\to\infty} a_n)$;

b) $\inf\{a_n : n \in \mathbf{N}\} = \liminf_{n\to\infty} a_n$;

c) $\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$;

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$?

4. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ jest zbieżny dla

a) $p = 100$;
b) $p = 1$;
c) $p = 2$;
d) $p = 1/2$?

5. Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$;
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$;
d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - 0}{x} = 1$?

6. Czy funkcja $f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} + \sin(t^2))\, dt$

a) ma nieskończenie wiele lokalnych minimów ;
b) ma lokalne maksimum w przedziale $(100, 1000)$;
c) ma lokalne minimum w $x = 0$;
d) ma lokalne maksimum w przedziale $(0, \sqrt{\pi})$?

7. Niech $f(a) = \int_0^a \frac{1}{x+a}\,dx$. Czy

a) $f(1) > 1$;
b) $f(1/2) > 1/2$;
c) $f(1/4) > 1/4$;
d) $f(1/3) > 1/3$?

8. Czy funkcja $f(x,y) = ax^2 + 2axy + y^2$ ma w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne, jeśli

a) $a = 5/2$;
b) $a = 3/2$;
c) $a = 1/2$;
d) $a = -1/2$?

9. Liczba zespolona z spełnia warunek $|z| = 1$. Czy wynika stąd, że

a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ jest zbieżny ;
b) ciąg (z^n) dąży do 0 ;
c) istnieje liczba naturalna dodatnia n, taka że $z^n = 1$;
d) ciąg (z^n) jest ograniczony ?

10. Czy podany zbiór jest ograniczonym podzbiorem $\mathbf{C}$?

a) $\{z \in \mathbf{C} : z^7 + 4z^5 + 7 \in \mathbf{R}\}$;

b) $\{z \in \mathbf{C} : |z^7 + 4z^5 + 7| < 7\}$;

c) $\{z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im}(z^7 + 4z^5 + 7)| < 7\}$;

d) $\{z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Re}(z^7 + 4z^5 + 7)| < 7\}$.

11. Wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są wektorami własnymi macierzy A dla wartości własnej 2. Ponadto $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Czy

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej -1 ;

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej 4 ;

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej 1 ;

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej 2 ?

12. Macierze $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ mają dodatnie wyznaczniki. Czy wynika stąd, że

a) $\det(A - B) \geq 0$;

b) $\det(AB) \geq 0$;

c) $\det(AB^{-1}) \geq 0$;

d) $\det(A + B) \geq 0$?

13. Niech $A \in M_{5\times 5}(\mathbf{R})$ i niech Y_0 będzie pewnym wektorem z $\mathbf{R}^5$. Załóżmy, że układ równań $AX = Y_0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Czy wynika stąd, że

a) układ $AX = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań ;

b) układ $AX = 2Y_0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań ;

c) istnieje $Y \in \mathbf{R}^5$ takie, że układ $AX = Y$ nie ma rozwiązań ;

d) jeśli układ $AX = Y$ ma rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele ?

14. Czy podana macierz jest odwracalna?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

15. Niech G będzie przemienną grupą rzędu 100. Czy wynika stąd, że w G jest element rzędu

a) 2 ;

b) 5 ;

c) 3 ;

d) 4 ?

16. Niech $R = \mathbf{Z}[X]$ będzie pierścieniem wielomianów o współczynnikach całkowitych. Czy jest ideałem pierścienia R

a) $\{f \in R : f(\sqrt{3}) = 0 \ \vee \ f(\sqrt{5}) = 0\}$;

b) zbiór tych $f \in R$, które są funkcjami nieparzystymi ;

c) zbiór tych $f \in R$, które są funkcjami parzystymi ;

d) $\{f \in R : f(\sqrt{3}) = 0 \ \wedge \ f(\sqrt{5}) = 0\}$?

17. Czy jest prawdą, że dla każdego n całkowitego podana liczba jest parzysta?

a) $n^2 - n$;

b) $n^7 + n^3 + 2n$;

c) $n^9 + n^8 + 7n^6 + 3n$;

d) $3n^2 + n$.

18. Na ścianach pewnej kostki napisano 6 różnych dodatnich liczb naturalnych. Wiadomo, że wartość oczekiwana wyniku rzutu tą kostką wynosi 5. Czy wynika stąd, że

a) na pewnej ścianie tej kostki jest liczba nieparzysta ;

b) na żadnej ścianie tej kostki nie ma liczby trzycyfrowej ;

c) na żadnej ścianie tej kostki nie ma liczby 5 ;

d) na pewnej ścianie tej kostki jest liczba parzysta ?

19. Bolek wybiera losowo krawędź sześcianu (każdą z tym samym prawdopodobieństwem); niezależnie od niego to samo robi Lolek (może się zdarzyć, że wybiorą tę samą krawędź). Niech $p_\emptyset$ oznacza prawdopodobieństwo, że wybrane przez niech krawędzie są rozłączne, $p_{||}$ – prawdopodobieństwo, że są one równoległe, zaś p_s – prawdopodobieństwo, że są one skośne (czyli rozłączne nierównoległe). Czy

a) $p_{||} + p_s < 1$;

b) $p_\emptyset > p_s$;

c) $p_s > p_{||}$;

d) $p_\emptyset = p_{||} + p_s$?

20. Niech $p_{n,k}$ oznacza prawdopodobieństwo, że w n niezależnych rzutach monetą wypadło dokładnie k orłów. Czy

a) $\lim_{n\to\infty} p_{3n,n} = 0$;

b) $\lim_{n\to\infty} p_{2n,n} = 0$;

c) $p_{27,6} = p_{27,21}$;

d) $p_{27,22} > p_{27,7}$?