

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozpatrzy trzy geny każdy o dominujących i recesywnych allelach oznaczonych odpowiednio przez A , a ; B , b ; i C , c .

- (a) Ile różnych gamet może wyprodukować osobnik o genotypie $AaBbCC$?
- (a) Jeśli skrzyżujemy dwa osobniki o genotypie $AaBbCC$, to ile różnych genotypów a ile fenotypów możemy otrzymać ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **2.** (8 punktów)

Rozpatrzmy fragment nici DNA złożony z 40 zasad

TTAGGATTACGATTACGAGGATCCAAATGGCACCAATGCT,

który w wyniku mutacji punktowych przybrał postać

*TTA*CT*ATTACGAT*C*ACGAGG*G*TCCAAATGGCACCA*T*TGCT.*

- (a) Zakładając, że mutacje w różnych miejscach nici DNA zachodzą w sposób niezależny, oszacuj na podstawie danych częstości poszczególnych mutacji punktowych.
- (b) Jaki ze znanych Ci model mutacji najlepiej pasuje do przedstawionych danych ?
- (c) Przedstaw argumenty przemawiające na korzyść wybranego modelu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **3.** (8 punktów)

Na podstawie próby 400 respondentów zbudowano 95% przedział ufności oceniający prawdopodobieństwo poparcia pewnego projektu rządowego. Błąd tego oszacowania (błąd statystyczny, dokładność przedziału) wynosi 5%. Zakładając, że popracie pozostaje na tym samym poziomie, podaj minimalną liczbę obserwacji, która zapewni błąd 2% na poziomie ufności 99%.

Wsk. Wykorzystaj tw. Moivre'a-Laplace'a.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **1.** (8 punktów)

Podaj rozwiązanie gry o sumie zero z następującą macierzą wypłat:

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza HU oraz $l_{20} = 10000$, $l_{30} = 7000$, $p_{20} = 0.95$ oraz ${}_2p_{20} = 0.91$.

a) Obliczyć ${}_{1.5}q_{20}$ oraz l_{22} ;

b) Załóżmy, że 20-latek wpłaca kwotę 1000 na lokatę o stałym oprocentowaniu na okres 10 lat. Równoległe drugi 20-latek zawiera z firmą ubezpieczeniową umowę na czyste ubezpieczenie na dożycie na 10 lat wpłacając kwotę 1000. Przy założeniu, że składka netto jest składką brutto oraz stopy procentowe są jednakowe, obliczyć o ile procent większą kwotę będzie dysponował po 10 latach ubezpieczony, przy założeniu że dożyje.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **3.** (8 punktów)

Na podstawie próby 400 respondentów zbudowano 95% przedział ufności oceniający prawdopodobieństwo poparcia pewnego projektu rządowego. Błąd tego oszacowania (błąd statystyczny, dokładność przedziału) wynosi 5%. Zakładając, że popracie pozostaje na tym samym poziomie, podaj minimalną liczbę obserwacji, która zapewni błąd 2% na poziomie ufności 99%.

Wsk. Wykorzystaj tw. Moivre'a-Laplace'a.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech macierz $A \in R^{n \times n}$ będzie symetryczna $A = A^T$, oraz niech spełnia warunek $x^T A x > 0$ dla $x \neq 0$. Dla $b \in R^n$ określamy funkcję:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b.$$

Wykazać, że wtedy:

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in R^n} \Phi(x) \iff Ax^* = b.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
int a(int x) {
    return -x;
}

int b(int x) {
    return x;
}

int c(int x) {
    return 0;
}

int (*T[3])(int) = {a,b,c};

int main()
{
    int i,n,S;

    n = sizeof(T)/sizeof(T[0]);
    for(S=i=0; i<n; ++i)
        S += (*T[i%3])(i+1);
    printf("S: %i\n", S);
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Uzasadnić otrzymany wynik.
3. Narysować schemat blokowy programu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **3.** (8 punktów)

Na podstawie próby 400 respondentów zbudowano 95% przedział ufności oceniający prawdopodobieństwo poparcia pewnego projektu rządowego. Błąd tego oszacowania (błąd statystyczny, dokładność przedziału) wynosi 5%. Zakładając, że popracie pozostaje na tym samym poziomie, podaj minimalną liczbę obserwacji, która zapewni błąd 2% na poziomie ufności 99%.

Wsk. Wykorzystaj tw. Moivre'a-Laplace'a.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **1.** (8 punktów)

Udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną oraz $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **2.** (8 punktów)

Wykazać, że w czworokącie wypukłym suma długości dwóch boków przeciwległych jest mniejsza od sumy długości przekątnych.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **3.** (8 punktów)

Na podstawie próby 400 respondentów zbudowano 95% przedział ufności oceniający prawdopodobieństwo poparcia pewnego projektu rządowego. Błąd tego oszacowania (błąd statystyczny, dokładność przedziału) wynosi 5%. Zakładając, że popracie pozostaje na tym samym poziomie, podaj minimalną liczbę obserwacji, która zapewni błąd 2% na poziomie ufności 99%.

Wsk. Wykorzystaj tw. Moivre'a-Laplace'a.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **1.** (8 punktów)

Pokazać, że każdy zbiór zwarty na płaszczyźnie jest spektrum pewnego operatora ograniczonego na L^2 .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **2.** (8 punktów)

Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n^{1/2}]}}{n},$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą x .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech X będzie gładkim polem wektorowym na płaszczyźnie, stycznym do okręgu jednostkowego C i nieosobliwym, czyli X jest różne od zera w każdym punkcie. Niech $\exp(X)$ będzie odwzorowaniem exponencjalnym tzn. $\exp(X)(x) = l(1)$, gdzie l jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego:

$$l(0) = x, \quad \text{oraz} \quad \frac{dl}{ds} = X(l(s)).$$

Pokazać, że dla dostatecznie małego $a > 0$ $\exp(aX)$ nie ma punktu stałego wewnątrz C . W szczególności z twierdzenia Browdera o punkcie stałym wynika, że takie pole nie istnieje.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2009
Matematyka teoretyczna

85