EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (testowa)
22.06.2009

INSTRUKCJE DOTYCZĄCE WYPEŁNIANIA TESTU

1. **Nie wolno korzystać z kalkulatorów**.
2. Sprawdzić, czy wersja testu podana na treści zadań jest zgodna z wersją podaną na karcie odpowiedzi.
3. Nie używać własnego papieru, papier na brudnopis zostanie dostarczony przez Komisję Egzaminacyjną. **Każdą kartkę brudnopisu nalezy bezzwłocznie podpisać.** Nie zadawać głośno pytań, ani nie wstawać z miejsc. W razie potrzeby (np. otrzymania dodatkowego papieru) podnieść rękę i zaczekać na miejscu na podejście osoby dyżurującej.
4. W każdym pytaniu udzielić odpowiedzi TAK lub NIE, **zaznaczając krzyżykiem kratkę z WŁAŚCIWĄ odpowiedzią**.
5. Punkty otrzymuje się tylko za zadania, w których udzieliło się 4 poprawnych odpowiedzi (po 1 punkcie za zadanie).
6. W przypadku konieczności dokonania zmiany odpowiedzi należy podnieść rękę i zaczekać na podejście osoby dyżurującej.
7. **Nie oglądać treści zadań bez pozwolenia, nie pisać po ogłoszeniu końca egzaminu !!!**

Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część I

zadania testowe

22 czerwca 2009 r.

60 HS-8-8

60 HS-8-8

1.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
2.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
3.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
4.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
5.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
6.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
7.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
8.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
9.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
10.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N

60 HS-8-8

11.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
12.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
13.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
14.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
15.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
16.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
17.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
18.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
19.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N
20.	a. T N	b. T N	c. T N	d. T N

1. Czy jest prawdą, że

a) $\forall_{m\in\mathbf{Z}}\exists_{n\in\mathbf{Z}} \quad m = n^2 + 1$;

b) $\forall_{m\in\mathbf{Z}}\exists_{n\in\mathbf{Z}} \quad n = m^2 + 1$;

c) $\exists_{m\in\mathbf{Z}}\forall_{n\in\mathbf{Z}} \quad m = n^2 + 1$;

d) $\exists_{m\in\mathbf{Z}}\forall_{n\in\mathbf{Z}} \quad n = m^2 + 1$?

2. Czy jest prawdą, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $(a+b)^2 \geq Cab$, jeśli

a) $C = -2$;

b) $C = -1$;

c) $C = 1$;

d) $C = 2$?

3. Czy podana liczba jest wymierna?

a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}$;

b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}$;

c) $\left(\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$;

d) $\left(\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$.

4. O ciągach (x_n), (y_n) wiadomo, że $x_n \to 1$ zaś $|y_n| < 2$. Czy wynika stąd, że

a) x_n jest dodatnie dla dostatecznie dużych n ;

b) ciąg $(x_n + y_n)$ ma podciąg zbieżny ;

c) $|x_n + y_n| < 3$ dla dostatecznie dużych n ;

d) ciąg $(x_n + y_n)$ ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych ?

5. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Czy

a) szereg ten jest zbieżny ;

b) jego suma wynosi 1 ;

c) szereg ten jest zbieżny bezwzględnie ;

d) jego sumy częściowe tworzą ciąg monotoniczny ?

Wersja testu **A** 22 czerwca 2009 r.

18. Na płaszczyźnie narysowano n prostych poziomych i k prostych pionowych. Bolek wybiera losowo jedną z tych $n + k$ prostych (każdą z tym samym prawdopodobieństwem), po czym Lolek wybiera losowo jedną z pozostałych $n + k - 1$ prostych (również każdą z tym samym prawdopodobieństwem). Niech $p(n, k)$ będzie prawdopodobieństwem, że wybrane proste przecinają się. Czy

a) $p(1, 6) < p(4, 3)$;

b) $p(2, 5) < p(3, 4)$;

c) $p(1, 6) < p(5, 2)$;

d) $p(3, 4) < p(4, 3)$?

19. Bolek wybiera losowo pole szachownicy 8×8 (każde z tym samym prawdopodobieństwem); niezależnie od niego to samo robi Lolek (może się zdarzyć, że wybiorą to samo pole)

a) Czy prawdopodobieństwo, że żadne z wybranych pól nie przylega do brzegu szachownicy jest większe niż $1/2$;

b) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane pola są sąsiednie (tzn. są różne i mają wspólny bok) jest większe niż $3/64$;

c) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane pola leżą w tym samym rzędzie lub w tej samej kolumnie jest mniejsze niż $1/4$;

d) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane pola są w tej samej kolumnie jest większe niż $1/8$?

20. Wybieramy losowo liczbę m ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., n\}$, a następnie wybieramy losowo liczbę k ze zbioru $\{m, m+1, \ldots, n\}$. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby k. Czy wtedy

a) $E(2) = 2$;

b) $E(3) = 2\frac{1}{2}$;

c) $E(4) = 3$;

d) $E(5) = 4$?

15. Czy jest prawdą, że w każdej grupie rzędu n istnieje element rzędu n, jeśli

a) $n = 3$;

b) $n = 6$;

c) $n = 4$;

d) $n = 5$?

16. Czy zbiór funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ opisany poniższym warunkiem tworzy grupę, jeśli działaniem jest mnożenie funkcji?

a) $\{f : \forall_{x\in\mathbf{R}} \quad f(x) \in \mathbf{Q}\}$;

b) $\{f : \forall_{x\in\mathbf{R}} \quad f(x) > 0\}$;

c) $\{f : \forall_{x\in\mathbf{R}} \quad f(x) = f(-x)\}$;

d) $\{f : \forall_{x\in\mathbf{R}} \quad f(x) < 0\}$.

17. Czy ideał generowany przez podane elementy jest całym pierścieniem wielomianów $\mathbf{R}[X]$?

a) $X + 2,\ X^2 + 1$;

b) $X^2 - 1,\ X^3 - 1$;

c) $X^3 - 1,\ X + 2$;

d) $X^2 + 1,\ X^2 - 1$.

Wersja testu **A** 22 czerwca 2009 r.

6. Czy granica istnieje i jest skończona?

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|$;

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

7. Czy funkcja cosinus jest rosnąca

a) w przedziale $(0, 2)$;

b) w przedziale $(2, 4)$;

c) w przedziale $(6, 8)$;

d) w przedziale $(4, 6)$?

8. Funkcja dwóch zmiennych f dana jest wzorem $f(x, y) = \int_x^y \sin t\, dt$. Czy f ma

a) lokalne minimum w punkcie $(x, y) = (5\pi, 8\pi)$;

b) lokalne minimum w punkcie $(x, y) = (0, 2\pi)$;

c) lokalne maksimum w punkcie $(x, y) = (4\pi, 7\pi)$;

d) lokalne maksimum w punkcie $(x, y) = (-\pi, 0)$?

9. Niech P będzie wielomianem stopnia 8 o współczynnikach rzeczywistych, którego druga pochodna jest – dla wszystkich argumentów rzeczywistych – dodatnia. Czy wynika stąd, że

a) P ma co najmniej 2 pierwiastki zespolone nierzeczywiste ;

b) P ma co najwyżej 2 pierwiastki rzeczywiste ;

c) P ma co najmniej 2 pierwiastki rzeczywiste ;

d) P ma dokładnie 2 pierwiastki rzeczywiste ?

10. O liczbach zespolonych z, w wiadomo, że $|z - w| < 7$, oraz że $\mathrm{Re}(z - w) > 3$. Czy

a) $(z - w)^2$ może być równe -16 ;

b) $\mathrm{Im}(w)$ może być równe 100 ;

c) $\mathrm{Im}(z - w)$ może być mniejsze niż 4 ;

d) $\mathrm{Im}(z - w)$ musi być mniejsze niż 6 ?

11. Iloczyn wektorowy pewnych dwóch wektorów ma długość 48. Czy

a) jeśli jeden z tych wektorów ma długość 8, to drugi musi mieć długość 6 ;

b) jeden z tych wektorów może mieć długość 100 ;

c) oba te wektory mogą być długości 100 ;

d) jeden z tych wektorów musi mieć długość większą niż 7 ?

Wersja testu **A** 22 czerwca 2009 r.

12. Pewna symetryczna macierz A rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych ma dwie wartości własne. Czy wynika stąd, że

a) istnieją trzy niezerowe parami prostopadłe wektory własne A ;

b) każde dwa niewspółliniowe wektory własne A są prostopadłe ;

c) istnieje niezerowy wektor własny A prostopadły do wszystkich niewspółliniowych z nim wektorów własnych A ;

d) istnieją dwa niezerowe prostopadłe wektory własne A ?

13. Czy jedną z wartości własnych macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

jest liczba

a) 1 ;

b) 3 ;

c) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$;

d) 2 ?

14. Wektory $v_1, v_2, \ldots, v_6 \in \mathbf{R}^6$ są liniowo zależne. Czy wynika stąd, że

a) pewne pięć z nich jest liniowo zależne ;

b) jeden z nich jest wektorem zerowym ;

c) istnieje wektor $v \in \mathbf{R}^6$ który nie jest ich kombinacją liniową ;

d) każdy z nich jest kombinacją liniową pozostałych .