

Egzamin licencjacki, zadania otwarte, 25.06.2008

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x + 2|\cos x|$$

na przedziale $[0, 3\pi/2]$ oraz określić, w których punktach te wartości są osiągane.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \sqrt{4^n + 1}}{n}.$$

3. Znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ y'(t) = -y(t). \end{cases}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Podać przykład macierzy kwadratowej A wymiaru 3×3 o następujących własnościach:

- jedynymi wartościami własnymi macierzy A są liczby 0 oraz 1,
- wartości własne 0 i 1 są jednokrotne.

Przypomnienie: Liczba λ jest jednokrotną wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wektorów własnych macierzy A dla wartości własnej λ jest jednowymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni \mathbb{R}^3 (czyli prostą zawierającą wektor zerowy).

Równoważnie: Liczba λ jest jednokrotną wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy jest jej wartością własną, a dowolne dwa wektory własne macierzy A dla wartości własnej λ są liniowo zależne.

5. Dana jest skończona grupa nieabelowa (nieprzemienne) G oraz takie jej dwa elementy a, b , że

- rząd elementu a jest równy 4,
- $ba = ab^3$.

Wyznaczyć rząd elementu b , jeśli wiadomo, że jest on nieparzystą liczbą pierwszą.

6. Sadownik zebrał ze swojego sadu owoce czereśni. Sadownik wie, że każdy owoc jest wadliwy z prawdopodobieństwem $1/10$. Lokalna przetwórnica jest gotowa kupić od sadownika wszystkie czereśnie po cenie n złotych za kilogram, dowolnie podyktowanej przez sadownika (n musi być liczbą naturalną) pod warunkiem, że nie są wadliwe. Sadownik chcąc sprzedać czereśnie zapewnia przetwórnice, że jego owoce nie są wadliwe, co przedstawiciel przetwórnicy zweryfikuje przed sfinalizowaniem transakcji otwierając n losowo wybranych czereśni (im wyższa cena, tym staranniejsza weryfikacja). Jeżeli co najmniej jedna z wybranych czereśni okaże się wadliwa, przetwórnica odstąpi od zakupu i sadownik nie będzie mógł sprzedać swoich plonów.

Jaką cenę powinien ustalić sadownik, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojego zarobku?