EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 13.02.2008
Biomatematyka

Zadanie **1.**

Rozpatrzmy locus o trzech allelach B_1, B_2 i b. Allel B_2 jest dominowany przez allel B_1 natomiast oba allele B_1 i B_2 dominują allel b. Jaka jest częstość tych trzech alleli w losowo kojarzącej się populacji jeśli wiadomo, że fenotyp B_{1-} występuje w tej populacji z częstością 0.5, fenotyp B_{2-} z częstością 0.3, natomiast bb z częstością 0.2?

Zadanie **2.**

Rozpatrzmy nić DNA o długości N nukleotydów, w której poszczególne nukleotydy pojawiają się losowo. Przyjmijmy założenie, o niezależności i jednakowości rozkładu pojawiania się nukleotydów. Tak więc każdy z nukleotydów może pojawić się na wybranym miejscu nici z prawdopodobieństwem 0,25 niezależnie od sposobu obsadzenia pozostałych miejsc.
Niech Y_N oznacza liczbę sekwencji GAA na rozpatrywanej nici.

(a) Policz wartość oczekiwaną zmiennej losowej Y_N.

(b) Policz wariancję zmiennej losowej Y_N.

Zadanie **3.**

Ile osób należałoby wylosować niezależnie do próby, aby oszacować z błędem maksymalnym 2%, na poziomie ufności 0,99, nieznany procent osób będących zadłużonych na kwotę większą niż 10 000 zł?

Zadanie **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t)^a + 2,$$
$$x(0) = 0,$$

kolejno dla $a = 1$ oraz $a = 2$.

Zadanie **5.**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że funkcja $d_1 : X \quad X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

też jest metryką.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 13.02.2008
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1.**

Szef reklamy ma do wyboru trzy różne rodzaje kampanii reklamowych A, B i C, którym można nadać wartości odpowiednio 6, 8 i 10 pod warunkiem, że konkurencja nie zna jego intencji. Jeśli konkurencja odkryje te intencje, to kampania zakończy się częściowym fiaskiem, przy czym odpowiednie wartości będą równe 5.5, 5 i 2. Jaki rodzaj kampanii powinien wybrać szef reklamy, jeśli
a) jest optymistą,
b) jest pesymistą,
c) interesuje go jedynie wartość oczekiwana,
d) dąży do zminimalizowania ryzyka (żalu) podjęcia niewłaściwej decyzji.

Zadanie **2.**

Niech dana będzie tablica trwania życia $l_x = 10000 \quad 100x$ dla $x = 0,1,...$ oraz załóżmy, że spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).
a) Obliczyć prawdopodobieństwo ${}_{10}p_{25}$ tego, że 25-latek przeżyje co najmniej 10 lat;
b) Wyznaczyć JSN dla ubezpieczenia na życie na 2 lata dla 24-latka. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **3.**

Ile osób należałoby wylosować niezależnie do próby, aby oszacować z błędem maksymalnym 2%, na poziomie ufności 0,99, nieznany procent osób będących zadłużonych na kwotę większą niż 10 000 zł?

Zadanie **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t)^a + 2,$$
$$x(0) = 0,$$

kolejno dla $a = 1$ oraz $a = 2$.

Zadanie **5.**

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że funkcja $d_1 : X \quad X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

też jest metryką.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 13.02.2008
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.**

Na osobnej kartce podany jest program.

Pytania:

(a) Co zostanie wyświetlone na ekranie w wyniku działania programu ?

(b) Jaki znany algorytm realizuje funkcja `void f(int n, unsigned char *a)` ?

Zadanie **2.**

Dla $v \in \mathbb{R}^n$, $v^T v = 1$ niech $H = I \quad 2vv^T$ – macierz *Hauseholdera*. Wykazać, że dla $a \in \mathbb{R}^n$ i $y = (I \quad vv^T)a$ zachodzi:

(a) $v \perp y$,

(b) $Ha = \quad vv^T a + y$.

Na podstawie powyższych własności podać geometryczną interpretację działania macierzy H na wektor a.

Zadanie **3.**

Ile osób należałoby wylosować niezależnie do próby, aby oszacować z błędem maksymalnym 2%, na poziomie ufności 0,99, nieznany procent osób będących zadłużonych na kwotę większą niż 10 000 zł?

Zadanie **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t)^a + 2,$$
$$x(0) = 0,$$

kolejno dla $a = 1$ oraz $a = 2$.

Zadanie **5.**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że funkcja $d_1 : X \quad X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

też jest metryką.

Program do zadania 1.

```
unsigned char m[] ={0x7a,0x66,0x72,0x5a,0x35,0x61,0x73,0x44,0x00};

void f(int n, unsigned char *a) {
  int i,j;
  char x;

  for(i=1 ; i<n ; ++i) {
    for(j=n-1 ; i<=j ; --j) {
      if( a[j-1]>a[j] ) {
        x      = a[j-1];
        a[j-1] = a[j];
        a[j]   = x;
      }
    }
  }
}

int main() {
  int i=-1,n=0;

  printf("   dane: '");
  while( m[n] )
  {
     if( n )
       printf(",");
     printf("%03u", m[n++]);
  }
  puts("'");
  printf(" liczba: 0x%02x\nwartosc: %i\n",m[n-1],n);
  f(n, m);
  printf("  wynik: '");
  while( m[++i] )
  {
     if( i )
       printf(",");
     printf("%03u", m[i]);
  }
  puts("'");
  return 0;
}
```

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 13.02.2008
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1.**

Ile jest liczb wymiernych z przedziału (0,1), które da się przedstawić w postaci nieskracalnego ułamka p/q, gdzie p, q są całkowite dodatnie, a przy tym $p+q=77$?

Zadanie **2.**

Napisać równanie tej spośród elips opisanych na prostokącie

$$\{(x,y): |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 2\},$$

która jest obrazem elipsy wpisanej w ten prostokąt przez pewną jednokładność.

Zadanie **3.**

Ile osób należałoby wylosować niezależnie do próby, aby oszacować z błędem maksymalnym 2%, na poziomie ufności 0,99, nieznany procent osób będących zadłużonych na kwotę większą niż 10 000 zł?

Zadanie **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$x'(t) = x(t)^a + 2,$$
$$x(0) = 0,$$

kolejno dla $a=1$ oraz $a=2$.

Zadanie **5.**

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że funkcja $d_1{:}X \quad X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

też jest metryką.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 13.02.2008
Zastosowania

Zadanie **1.**

Niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem stochastycznym o stacjonarnych i niezależnych przyrostach oraz $EX(1) = \quad > 0$. Wyznaczyć funkcję

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P(X(n) \geqslant xn)$$

dla $x > \quad$.

Zadanie **2.**

Pewien urzędnik posiada 5 parasolek i codziennie wędruje z domu do biura i z powrotem. Jeśli jest w domu/w biurze na początku/końcu dnia oraz pada wtedy deszcz, to urzędnik zabiera ze sobą parasol pod warunkiem, że chociaż jeden jest w domu/w biurze. Jeśli nie pada deszcz, to urzędnik nie zabiera ze sobą parasola. Załóżmy, że niezależnie od przeszłości deszcz pada z rana/wieczorem z prawdopodobieństwem p. Znajd z stacjonarny rozkład parasolek w domu.

Zadanie **3.**

Niech próba $X_1, \ldots, X_n$ pochodzi z rozkładu normalnego ze średnią m i wariancją $\ ^2$. Znajdź estymator największej wiarygodności dwuwymiarowego parametru $\quad = (m, ^2)$.

Zadanie **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)^a + 2, \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

kolejno dla $a = 1$ oraz $a = 2$.

Zadanie **5.**

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że funkcja $d_1 : X \quad X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

też jest metryką.