

Egzamin licencjacki, zadania otwarte, 7.02.2008

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 3x + 4y + |x - y|$$

na okręgu

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

oraz podać, w których punktach wartości najmniejsza i największa są osiągnane.

2. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-1}^1 \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} (x^2 + y^2 - 1)^{24} dy dx.$$

3. Zbiór

$$Z = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{0, 1\} \wedge a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 0\}$$

składa się z 31 niezerowych wektorów przestrzeni \mathbb{R}^5 .

Podać przykład takiej macierzy kwadratowej A wymiaru 5×5 , że w zbiorze Z jest dokładnie 10 wektorów własnych macierzy A .

4. Rozstrzygnąć, czy w grupie permutacji S_{10} istnieje element rzędu 15.

5. Dysponujemy probabilistycznym testem pierwszości liczb dającym następujące rezultaty:

- test zastosowany do liczby pierwszej zawsze daje odpowiedź: **NIE WIADOMO**,
- test zastosowany do liczby złożonej daje odpowiedź: **NIE WIADOMO** z prawdopodobieństwem $1/2$, a odpowiedź: **LICZBA JEST ZŁOŻONA** z prawdopodobieństwem $1/2$,

- wielokrotne stosowanie testu daje niezależne wyniki.

Wylosowano liczbę ze zbioru, w którym 99.9% to liczby złożone, a 0.1% to liczby pierwsze. Następnie poddano wylosowaną liczbę n -krotnemu testowi i otrzymano za każdym razem odpowiedź: **NIE WIADOMO**.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest liczbą pierwszą?

Ile razy należy wykonać test, aby w opisanej wyżej sytuacji móc stwierdzić, że wylosowana liczba jest pierwsza z prawdopodobieństwem:

- większym od $1/2$?
- większym od $999/1000$?

6. Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) &= 0, \\x(0) &= 1, \quad x'(0) = 4.\end{aligned}$$