EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 17.09.2007
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**

Badamy wpływ dwóch czynników mutagennych na DNA. W tym celu podczas każdej replikacji nić DNA poddawana jest na przemian działaniu pierwszego i drugiego czynnika wywołującego mutacje. Wiemy, że mutacje wywołane pierwszym czynnikiem można opisać przy pomocy modelu Jukes-Cantora z parametrem mutacji α_1, natomiast mutacje wywołane drugim czynnikiem można opisać przy pomocy modelu Jukes-Cantora z parametrem α_2. Niech zmienna losowa X_n podaje rodzaj nukleotydu na wybranym miejscu po n replikacjach.

(a) Obliczyć prawdopodobieństwa wystąpienia na wybranym miejscu poszczególnych nukleotydów, zakładając, że początkowo znajdowała się tam adenina.

(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po bardzo dużej liczbie replikacji na wybranym miejscu jest taki sam nukleotyd, jak w chwili początkowej?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozpatrzmy trzy geny każdy o dominujących i recesywnych alleach oznaczonych odpowiednio przez A, a; B, b; i C, c.

(a) Ile różnych gamet może wyprodukować osobnik o genotypie $AaBbCC$?

(b) Jeśli skrzyżujemy dwa osobniki o genotypie $AaBbCC$, to ile różnych genotypów i ile fenotypów możemy otrzymać?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozpatrzmy populację, której rozwój opisany jest przez równanie logistyczne

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right); \; N(0) = N_0.$$

Zakładamy, że populacja poddana jest odłowom ze **stałą intensywnością** $H > 0$.

(i) Dla jakich intensywności odłowów H populacja nie ulegnie wymarciu?

(ii) Wyznaczyć maksymalną intensywność odłowu H_c nie powodującego wyniszczenia populacji.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Kontrola jakości stwierdziła, że ze 100 zamówionych sztuk towaru 5 było wadliwych. Zbuduj 99% przedział ufności dla prawdopodobieństwa wyprodukowania sztuki wadliwej.

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 17.09.2007
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**
Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = P(T > x) = \sqrt{\frac{\omega - x}{\omega}} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant \omega$$

oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP). Ponadto ${}_{17}p_{18} = \frac{8}{9}$.
a) Obliczyć ω oraz (przy założeniu hipotezy jednostajności HU) ${}_{1.5}p_{24}$.
b) Wyznaczyć JSN dla ubezpieczenia na życie i dożycie dla 18-latka na 1 rok. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Szkoda X ma rozkład równomierny na zbiorze $\{0,1,2\}$, a szkoda $Y = 0.5X + 1$. Ponadto szkody Y i Z są jednakowo rozłożone i niezależne.
a) Obliczyć prawdopodobieństwa $P(X+Y<2)$ i $P(X+Z<2)$.
b) Obliczyć $Var(X+Y)$ oraz $Var(X+Z)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Dana jest gra dwuosobowa o sumie zero z macierzą wypłat postaci:

$$N = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -4 & 0 \\ -6 & 9 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & 6 & -12 \end{vmatrix}.$$

Znaleźć wartość tej gry oraz strategię optymalną dla każdego gracza.
Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{x} = (0.5, 0.3, 0.2)$ jest strategią optymalną w tej grze.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Kontrola jakości stwierdziła, że ze 100 zamówionych sztuk towaru 5 było wadliwych. Zbuduj 99% przedział ufności dla prawdopodobieństwa wyprodukowania sztuki wadliwej.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie Eulera

$$t^2 x''(t) + t x'(t) - \lambda x(t) = 0, \; t \in (1, e)$$

posiada niezerowe rozwiązanie $x : [1,e] \to \mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe

$$x(1) = x(e) = 0.$$

Wsk. Równanie Eulera można sprowadzić do równania liniowego o stałych współczynnikach przez podstawienie $x(t) = y(\ln(t))$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 17.09.2007
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.** **(8 punktów)**
Na osobnej kartce podany jest program.
Pytania:

1. narysować schemat blokowy działania funkcji `F1(...)` i `F2(...)`,
2. co zostanie wyświetlone na ekranie w wyniku działania programu,
3. dla dowolnej tablicy `double w[]`, która z funkcji `F1(...)`, `F2(...)` pod względem obliczeniowym jest lepsza, dlaczego?
4. jak prościej można obliczyć wartości `F1(...)`, `F2(...)`.

Zadanie **2.** **(8 punktów)**
Podać uzasadnienie teoretyczne metody *„przez połowienie przedziału”* rozwiązywania równania:

$$f(x)=0.$$

Zadanie **3.** **(8 punktów)**
Z definicji całki *Riemanna* uzasadnić wzór:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n}=\ln 2.$$

Zadanie **4.** **(8 punktów)**
Kontrola jakości stwierdziła, że ze 100 zamówionych sztuk towaru 5 było wadliwych. Zbuduj 99% przedział ufności dla prawdopodobieństwa wyprodukowania sztuki wadliwej.

Zadanie **5.** **(8 punktów)**
Dla jakich wartości parametru $\lambda\in\mathbb{R}$ równanie Eulera

$$t^2x''(t)+tx'(t)-\lambda x(t)=0,\ t\in(1,e)$$

posiada niezerowe rozwiązanie $x:[1,e]\to\mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe

$$x(1)=x(e)=0.$$

Wsk. Równanie Eulera można sprowadzić do równania liniowego o stałych współczynnikach przez podstawienie $x(t)=y(\ln(t))$.

```
double w[]={1.0, -3.0, 3.0,  -1.0};

double F1(double x, double a[], unsigned n)
{
   unsigned i;
   double r;

   r = a[0];
   for(i=1 ; i<n; ++i)
      r = r*x + a[i];
   return r;
}

double F2(double x, double a[], unsigned n)
{
   double p,r;
   int i;

   r = a[n-1];
   p = 1.0;
   for(i=n-2 ; 0<=i ; --i)
   {
      p = p * x;
      r = r + a[i]*p;
   }
   return r;
}

int main()
{
   unsigned i;

   for(i=0 ; i<10; ++i)
   {
      printf("%10.4lf  ", F1(0.1*i, w, sizeof(w)/sizeof(w[0])) );
      printf("%10.4lf\n", F2(0.1*i, w, sizeof(w)/sizeof(w[0])) );
   }
   return 0;
}
```

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 17.09.2007
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

a) Wykazać, że suma kolejnych liczb naturalnych od 1 do 2007 dzieli się przez 3.
b) Dla jakich k suma kolejnych liczb naturalnych od 1 do k dzieli się przez 3?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech J^s oznacza jednokładność o środku w punkcie (0,0) i skali s. Niech K oznacza koło wpisane w trójkąt o wierzchołkach (0,0), (6,0), (0,6). Znajleźć takie s, że K i $J^s(K)$ są zewnętrznie styczne.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech M oznacza ośmiościan foremny o krawędzi długości 1 i niech N oznacza najmniejszą bryłę wypukłą zawierającą środki wszystkich krawędzi ośmiościanu M. Wyznaczyć pole powierzchni N.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Kontrola jakości stwierdziła, że ze 100 zamówionych sztuk towaru 5 było wadliwych. Zbuduj 99% przedział ufności dla prawdopodobieństwa wyprodukowania sztuki wadliwej.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie Eulera

$$t^2x''(t)+tx'(t)-\lambda x(t)=0,\ t\in(1,e)$$

posiada niezerowe rozwiązanie $x:[1,e]\to\mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe

$$x(1)=x(e)=0.$$

Wsk. Równanie Eulera można sprowadzić do równania liniowego o stałych współczynnikach przez podstawienie $x(t)=y(\ln(t))$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 17.09.2007
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B(t); t \geqslant 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna oraz $f(i) = i(i+1)/2$ dla $i = 1, 2, \ldots$

a) Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{B(f(i+1)) - B(f(i))}{\sqrt{(i+1)n}}$.

b) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B(f(i+1)) - B(f(i))}{\sqrt{i+1}} > n\right)$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie oraz $EX_1 = 0$ i $EX_1^2 = 2$. Zbadać zbieżność

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} X_i^2},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Jeżeli zmienna losowa ma rozkład normalny $N(m, \sigma^2)$, to rozkład zmiennej losowej $Y = e^X$ nazywamy logarytmiczno-normalnym z parametrami m i σ. Znaleźć estymatory największej wiarygodności parametrów m i σ^2 na podstawie próby $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ rozmiaru n z rozkładu logarytmiczno normalnego z parametrami m i σ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Udowodnić, że suma n niezależnych procesów Poissona z parametrem λ jest procesem Poissona z parametrem $n\lambda$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie Eulera

$$t^2 x''(t) + t x'(t) - \lambda x(t) = 0, \ t \in (1, e)$$

posiada niezerowe rozwiązanie $x : [1, e] \to \mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe

$$x(1) = x(e) = 0.$$

Wsk. Równanie Eulera można sprowadzić do równania liniowego o stałych współczynnikach przez podstawienie $x(t) = y(\ln(t))$.