

Zadania otwarte 2007-09.

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

na przedziale $[-1, 1]$ i podać, w których punktach wartości najmniejsza i największa są osiąmane.

2. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((-1)^n - 3)^n}.$$

3. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y^3 e^{x^3} dx dy.$$

Wskazówka: Zmienić kolejność całkowania.

4. A jest macierzą kwadratową wymiaru 3×3 . Wektor v_1 jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej -3 . Wektor v_2 jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej 2 . Dowieść, że wektor $2v_1 + 3v_2$ jest wektorem własnym macierzy $A^2 + A$.

5. Dowieść, że dla dowolnych elementów a, b grupy nieabelowej (nieprzemiennej) G , rząd elementu bab^{-1} jest równy rzędowi elementu a .

6. W tajnym ośrodku badawczym pracuje 40 naukowców: 20 mężczyzn i 20 kobiet. Kontrwywiad ustalił, że wśród nich jest troje szpiegów: dwóch mężczyzn i jedna kobieta. Nie ma jednak możliwości zidentyfikowania, którzy pracownicy ośrodka są szpiegami. Ośrodek ma rozpocząć nowy projekt badawczy, do którego przeprowadzenia trzeba utworzyć 20-osobowy zespół.

Ilu mężczyzn i ile kobiet należy powołać w skład zespołu, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo, że w zespole nie znajdzie się żaden szpieg?