

EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
25.06.2007

Zadanie 1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^2 - 5|x - 1|$$

na przedziale $[-5, 3]$. Podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie 2. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^p+1}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p .

Zadanie 3. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx .$$

Zadanie 4. Podać przykład takich macierzy A i B wymiaru 3×3 , że $\det A > 0$, $\det B > 0$ oraz $\det(A+B) < 0$.

Zadanie 5. Grupa G jest skończona, a liczba jej elementów jest nieparzysta. Dowieść, że dla dowolnego elementu g grupy G istnieje taki element h grupy G , że $h^2 = g$.

Uwaga. Nie ma żadnych założeń o przemienności grupy G . Grupa może być przemienna lub nieprzemienna.

Zadanie 6. Przemek i Gosia grają w następującą grę. Wykonują rzuty monetą. Gdy w dwóch kolejnych rzutach pojawią się orły, gra zostaje zakończona i wygrywa Przemek. Gdy bezpośrednio po rzucie, w którym wypadła reszka, wypadnie orzeł, gra kończy się zwycięstwem Gosi. Gdy po n rzutach nie nastąpiło rozstrzygnięcie, gra kończy się remisem.

Wyznaczyć prawdopodobieństwa zwycięstwa Przemka, zwycięstwa Gosi oraz remisu w zależności od $n \geq 1$. Obliczyć granice w/w prawdopodobieństw przy n dążącym do nieskończoności.

Zadania 5, 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.