EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 2.07.2007
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**

Badamy wpływ dwóch czynników mutagennych na DNA. W tym celu podczas każdej replikacji nić DNA poddawana jest na przemian działaniu pierwszego i drugiego czynnika wywołującego mutacje. Wiemy, że mutacje wywołane pierwszym czynnikiem można opisać przy pomocy modelu Jukes-Cantora z parametrem mutacji α_1 , natomiast mutacje wywołane drugim czynnikiem można opisać przy pomocy modelu Jukes-Cantora z parametrem α_2. Niech zmienna losowa X_n będzie równa 1, gdy na wybranym miejscu nukleotyd po n replikacjach jest taki sam, jak w chwili początkowej, oraz niech X_n będzie równe 0 w przeciwnym przypadku.

(a) Podać rozkład zmiennej losowej X_1.

(b) Podać rozkład zmiennej losowej X_4.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozważmy autosomalny, czyli niezwiązany z płcią, locus o m allelach w warunkach równowagi Hardy'ego-Weinberga. Wykazać, że jeśli allel A_i występuje z częstością p_i , to losowo wybrany osobnik z tej populacji jest heterozygotyczny z prawdopodobieństwem $1-\sum_{i=1}^{m} p_i^2$. Jakie duże może być to prawdopodobieństwo, i dla jakiej częstości alleli jest ono osiągane?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $N(t)$ oznacza liczebność pewnej populacji w chwili t. Zakładamy, że rozwój tej populacji opisany jest przez równanie

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - hN(t), \tag{1}$$

gdzie h jest stałą dodatnią, a $N(0)=N_0$.

(i) Znaleźć punkty stacjonarne równania (1) oraz zbadać ich stabilność.

(ii) Dla jakich wartości stałej h populacja nie ulegnie wymarciu?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Z talii 52 kart wyjęto p pików ($p=0,1,\dots,13$). W celu oszacowania liczby p, czterokrotnie, ze zwracaniem, wylosowano kartę z talii i policzono liczbę k wylosowanych w ten sposób pików. Znajdź estymator największej wiarygodności liczby wyjętych pików p. Czy jest to estymator nieobciążony?

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 2.07.2007
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = 1 - \frac{x}{\omega}$, dla $0 \leqslant x \leqslant \omega$ oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP). Z tablic trwania życia wiadomo, że $l_{25} = 50000$, $l_{35} = 40000$

a) Obliczyć ω oraz prawdopodobieństwo ${}_{10}p_{25}$ tego, że 25-latek przeżyje co najmniej 10 lat;

b) Wyznaczyć JSN dla bezterminowego ubezpieczenia na życie dla 74-latka. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Szkoda X ma rozkład $P(X = 0) = 0.5$, $P(X = 1) = 0.3$, $P(X = 2) = x$, $P(X = 3) = 0.2 - x$. Wiadomo, że $EI_1(X) = 0.5$, gdzie I_d oznacza kontrakt stop-loss.

a) Obliczyć x;

b) Wyznaczyć $Var(I_1(X))$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dana jest gra dwuosobowa o sumie zero z macierzą wypłat postaci:

$$N = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Znaleźć wartość tej gry oraz strategię optymalną dla każdego gracza.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Z talii 52 kart wyjęto p pików ($p = 0, 1, \ldots, 13$). W celu oszacowania liczby p, czterokrotnie, ze zwracaniem, wylosowano kartę z talii i policzono liczbę k wylosowanych w ten sposób pików. Znajdź estymator największej wiarygodności liczby wyjętych pików p. Czy jest to estymator nieobciążony?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ następującego zagadnienia początkowego

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 2.07.2007
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dany jest następujący program:

```
int T[]={9,8,1,0,7,6,4,3,6,5,-1};

void fn(int *A,unsigned n)
{
   unsigned i,j;
   int r;

   for(i=0 ; i<n-1 ; ++i)
   {
      for(j=i+1 ; j<n ; ++j)
      {
// porownanie
         if( A[i]<=A[j] )
            continue;
// przestawienie
         r    = A[i];
         A[i] = A[j];
         A[j] = r;
      }
   }
}

int main()
{
   unsigned i;

   fn(T, sizeof(T)/sizeof(T[0]) );
   for(i=0 ; i<sizeof(T)/sizeof(T[0]) ; ++i)
      printf("%3i ",T[i]);
   return 0;
}
```

Pytania:

1. Narysować schemat blokowy działania programu.
2. Co zostanie wyświetlone na ekranie w wyniku działania programu?
3. Ile będzie porównań i przestawień w funkcji `void fn(int *,unsigned)` ?

4. Ogólnie, dla dowolnej tablicy `int T[]`, ile najmniej i najwięcej będzie przestawień w funkcji `void fn(int *,unsigned)` ?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Wyprowadzić wzór z metody *Newtona*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1,2,\ldots$$

rozwiązywania równania:

$$f(x) = 0.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dla dwóch liczb $x = \mathrm{ff}_{16}$ i $y = 11_{16}$ zapisanych *szestnastkowo*, obliczyć iloczyn $x * y$. Wynik podać zapisany (z uzasadnieniem) przy podstawie *szestnastkowej*, *ósemkowej*, *dziesiętnej* i *binarnej*.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Z talii 52 kart wyjęto p pików ($p = 0,1,\ldots,13$). W celu oszacowania liczby p, czterokrotnie, ze zwracaniem, wylosowano kartę z talii i policzono liczbę k wylosowanych w ten sposób pików. Znajdź estymator największej wiarygodności liczby wyjętych pików p. Czy jest to estymator nieobciążony?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ następującego zagadnienia początkowego

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 2.07.2007
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
a) Wykazać, że suma kwadratów kolejnych liczb naturalnych od 1 do 2007 dzieli się przez 3.
b) Dla jakich k kwadrat sumy kolejnych liczb naturalnych od 1 do k dzieli się przez 3?

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech J^s oznacza jednokładność o środku w punkcie (0,0,0) i skali s. Niech K oznacza kulę wpisaną w czworościan o wierzchołkach (0,0,0), (6,0,0), (0,6,0), (0,0,6). Znaleźć takie s, że K i $J^s(K)$ są zewnętrznie styczne.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Skonstruować okrąg styczny do danej prostej, przechodzący przez dwa zadane punkty. Dokładnie przedyskutować liczbę rozwiązań.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Z talii 52 kart wyjęto p pików ($p = 0,1,\ldots,13$). W celu oszacowania liczby p, czterokrotnie, ze zwracaniem, wylosowano kartę z talii i policzono liczbę k wylosowanych w ten sposób pików. Znajdź estymator największej wiarygodności liczby wyjętych pików p. Czy jest to estymator nieobciążony?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Znajdź rozwiązanie $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ następującego zagadnienia początkowego

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 2.07.2007
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (10 punktów)**
Znajdź wszystkie funkcje analityczne $f: C \to C$ dla których $\mathrm{Re}(f(z))$ zależy tylko od $\mathrm{Re}(z)$.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Ciało K nazywamy *algebraicznie domkniętym*, gdy dowolny wielomian o współczynnikach z K rozkłada sie nad K w iloczyn wielomianów stopnia 1. Udowodnij, że żadne ciało skończone nie jest algebraicznie domknięte.

Zadanie **3. (10 punktów)**
Podczas ruchu punktu P po gładkiej regularnej krzywej γ na płaszczyźnie ruchomy punkt Q znajduje się w każdej chwili na stycznej do γ w punkcie aktualnego położenia P, w stałej odległości $d > 0$ od P. Uzasadnij, że jeśli γ nie jest fragmentem prostej, to droga jaką pokonuje punkt Q jest dłuższa niż droga punktu P w tym samym przedziale czasowym.

Zadanie **4. (10 punktów)**
(A) Niech A_1, A_2, A_3 będą zdarzeniami niezależnymi o prawdopodobieństwie $1/2$ i niech $A_{ij} := (A_i * A_j)^c$, gdzie $*$ oznacza różnicę symetryczną, zaś ^{c} oznacza dopełnienie. Uzasadnij, że zdarzenia A_{12}, A_{13}, A_{23} nie są niezależne, mimo że są parami niezależne.
(B) Znajdź przykład 4 zdarzeń, które nie są niezależne, mimo że każda podrodzina złożona z conajwyżej 3 spośród tych zdarzeń jest niezależna.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 2.07.2007
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_1(t); t \geqslant 0\}$ oraz $\{B_2(t); t \geqslant 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste $a, b > 0$ takie, że $\{\frac{aB_1(t)+B_2(bt)}{\sqrt{5}}; t \geqslant 0\}$ oraz $\{\frac{B_1(at)+bB_2(t)}{\sqrt{3}}; t \geqslant 0\}$ są standardowymi ruchami Browna. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech X_n ma rozkład $\chi^2(n)$, a Y_n rozkład normalny o średniej n i wariancji n, dla $n = 1, 2, \ldots$ Zbadać zbieżność

$$\frac{X_n}{Y_n},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Korzystając z podstawowego lematu Neymana-Pearsona skonstruować najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ przy hipotezie alternatywnej $H_1 : \theta = \theta_1$ na poziomie istotności α. Zakładamy, że próba pochodzi z rozkładu jednostajnego $U(0, \theta)$ oraz $0 < \theta_0 < \theta_1$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $\{X(t), t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa w czasie ciągłym z macierzą intensywności:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Udowodnić, że $Y(t) = 2X(t) + 1$ jest też procesem Markowa i znaleźć jego rozkład stacjonarny.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ następującego zagadnienia początkowego

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$