EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.09.2006
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że częstości genotypów AA, Aa i aa w całej populacji wynoszą p^2, $2pq$ i q^2. Wiadomo, że czynnik selekcyjny sprawia, że osobniki o genotypie aa nie rozmnażają się.

1. Wyznacz częstości genotypów AA, Aa i aa dla potomków pierwszego pokolenia tej populacji.
2. Wyznacz częstość genu a w $n-$tej generacji tej populacji.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Dla sprawdzenia skuteczności nowej szczepionki zaszczepiono nią n sztuk bydła podczas gdy starą szczepionką zaszczepiono m sztuk. Zaproponuj procedurę statystyczną na podstawie której można przetestować hipotezę o **większej** skuteczności działania nowej szczepionki.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych całkowitoliczbowych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = k) = p_k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

Niech

$$Y_0 = X_0,\ Y_n + cY_{n-1} = X_n,\ \text{dla}\ n \geqslant 1,$$

gdzie c jest liczbą całkowitą.

1. Wykazać, że ciąg zmiennych losowych $\{Y_n\}_0^{\infty}$ tworzy łańcuch Markowa.
2. Podaj postać macierzy prawdopodobieństw przejść tego łańcucha.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Zmierzono przebytą drogę samochodu po 1,2,3 i 4 sekundach od momentu startu: 10,50,150,250 m. Napisz wzór na estymator najmniejszych kwadratów dla przyspieszenia. Oblicz wartość tego estymatora dla podanych danych.

Wskazówka. Wzór na drogę s po czasie t z przyspieszeniem a: $s = \frac{1}{2}at^2$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$x'(t) = (x(t))^{\alpha} + 1,$$
$$x(0) = 0,$$

a) dla $\alpha = 1$,
b) dla $\alpha = 2$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.09.2006
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}$, dla $0 \leqslant x \leqslant 100$ oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).
a) Obliczyć prawdopodobieństwo ${}_2p_{20}$ tego, że 20-latek przeżyje co najmniej 2 lata;
b) Wyznaczyć JSN dla portfela ubezpieczeniowego dla 98-latka składającego się z ubezpieczenia na całe życie oraz z czystego ubezpieczenia na dożycie na 5 lat. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Szkoda X ma rozkład: $P(X=0) = 0.5$, $P(X=1) = 0.3$, $P(X=2) = 0.2$. Wiadomo, że szkoda Y może zajść tylko gdy $X = 0$ i wtedy szansza, że będzie w wysokości 1 wynosi 0.9, a szansa, że będzie w wysokości 2 wynosi 0.1. Obliczyć:
a) prawdopodobieństwo, że sumaryczna wysokość szkód $X+Y$ wynosi co najmniej 2;
b)$EI_1(X+Y)$, gdzie $I_d(X)$ oznacza kontrakt stop-loss.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Jednym z rozwiązań dopuszczalnych następującego zagadnienia programowania liniowego:

Zminimalizować $\quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5,$
przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \geqslant & 10 \\
 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & \geqslant & 8 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & - & 2x_5 & \geqslant & 6
\end{array}$$

$$x_i \geqslant 0,$$

jest $x^0 = (3,0,2,0,1)$.
Sprawdź, czy jest to także rozwiązanie optymalne.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Zmierzono przebytą drogę samochodu po 1,2,3 i 4 sekundach od momentu startu: 10,50,150,250 m. Napisz wzór na estymator najmniejszych kwadratów dla przyspieszenia. Oblicz wartość tego estymatora dla podanych danych.

Wskazówka. Wzór na drogę s po czasie t z przyspieszeniem a: $s = \frac{1}{2}at^2$

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.09.2006
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dla danej listy określonej deklaracją

```
struct StRec
{
   int n;
   struct StRec *next;
};
```

napisać funkcję w języku **C**, która dla danej liczby m typu `int` wyznaczy ile jej elementów ma pole n o wartości większej od m.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dla układu

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{cases}$$

i *metody Gaussa–Seidela*:

1. przyjmując za wektor startowy $\mathbf{0}$, wyznaczyć dwie pierwsze iteracje;
2. uzasadnić, że dla tego układu metoda ta jest zbieżna.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $f(x) = x(x-1)$. Wykazać, że dla każdego $x_0 > 1$ ciąg przybliżeń x_n rozwiązania równania $f(x) = 0$, wyznaczony przez *metodę Newtona* jest zbieżny $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zmierzono przebytą drogę samochodu po 1,2,3 i 4 sekundach od momentu startu: 10,50,150,250 m. Napisz wzór na estymator najmniejszych kwadratów dla przyspieszenia. Oblicz wartość tego estymatora dla podanych danych.
Wskazówka. Wzór na drogę s po czasie t z przyspieszeniem a: $s = \frac{1}{2}at^2$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$x'(t) = (x(t))^\alpha + 1,$$
$$x(0) = 0,$$

a) dla $\alpha = 1$,
b) dla $\alpha = 2$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.09.2006
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k > 3$ takie, że $\frac{1}{3}$ w układzie pozycyjnym o podstawie k ma na pierwszym miejscu po przecinku cyfrę 3.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Środki cięciw elipsy $\frac{1}{4} \cdot x^2 + y^2 = 1$ o jednym końcu w punkcie $P(-2,0)$ tworzą elipsę. Wyznaczyć jej równanie; podać długości półosi.

Zadanie **3. (8 punktów)**
W czworościanie o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ środki okręgów wpisanych w ściany tego czworościanu są wierzchołkami nowego czworościanu. Wyznaczyć jego objętość.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zmierzono przebytą drogę samochodu po 1,2,3 i 4 sekundach od momentu startu: 10,50,150,250 m. Napisz wzór na estymator najmniejszych kwadratów dla przyspieszenia. Oblicz wartość tego estymatora dla podanych danych.
Wskazówka. Wzór na drogę s po czasie t z przyspieszeniem a: $s = \frac{1}{2}at^2$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x'(t) &= (x(t))^{\alpha} + 1, \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

a) dla $\alpha = 1$,
b) dla $\alpha = 2$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.09.2006
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_i(t); t \geqslant 0\}$, $i = 1,2,...$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna. Znaleźć postać funkcji $f(\cdot)$ takiej, że dla każdego n

$$f(n)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}B_i(t)$$

jest standardowym ruchem Browna. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech X_1, X_2, ... będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,2]$. Zbadać zbieżność z prawdopodobieństwem 1 szeregu

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\,,$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $(X_1,...,X_n)$ będzie wynikiem n niezależnych doświadczeń każdorazowo polegających na zliczaniu ilości niezależnych rzutów monetą przed uzyskaniem po raz pierwszy orła. Korzystając z kryterium faktoryzacji wyznaczyć statystykę dostateczną dla prawdopodobieństwa wypadnięcia orła θ. Czy otrzymana statystyka jest minimalną statystyką dostateczną? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $\{X(i) : i \in \mathbb{N}\}$ będzie procesem stochastycznym o stacjonarnych i niezależnych przyrostach. Załóżmy, że $\mathrm{Var}(X(1)) = a < \infty$. Czy prawdą jest, że $\mathrm{Var}(X(i)) < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$? Wyznaczyć postać $\mathrm{Var}(X(i))$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x'(t) &= (x(t))^\alpha + 1, \\ x(0) &= 0, \end{aligned}$$

a) dla $\alpha = 1$,
b) dla $\alpha = 2$.