EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
20.09.2005

Zadanie **1.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2$$

na okręgu zdefiniowanym równaniami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x + y + z = 0\,.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty okręgu, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **2.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{\binom{3n}{n}}\,.$$

Zadanie **3.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy\,.$$

Wskazówka: Zmienić kolejność całkowania.

Zadanie **4.** Dane są macierze kwadratowe A, B o wymiarach 3×3 oraz niezerowe wektory
$v,w \in \mathbb{R}^3$ o następujących własnościach:

- wektor v jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej 2,
- wektor w jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej 3,
- wektor v jest wektorem własnym macierzy B dla wartości własnej 7,
- wektor w jest wektorem własnym macierzy B dla wartości własnej λ.

Wyznaczyć wszystkie wartości λ, dla których z powyższych założeń wynika, że wektor $v+w$ jest wektorem własnym macierzy $A+B$.

Zadanie **5.** Podać przykład grupy nieabelowej, w której istnieje element rzędu 2 i istnieje element rzędu 3, a nie istnieje element rzędu 6.

Zadanie **6.** Tomek, Witek, Xawery i Zenek grają w brydża. W jednym rozdaniu otrzymują po 13 kart z talii liczącej 52 karty.

Niech A będzie zdarzeniem:

- Tomek dostał asa trefl, Witek dostał asa pik, a Xawery dostał pozostale dwa asy (kier i karo).

Niech B będzie zdarzeniem:

- Witek dostał waleta trefl.

Rozstrzygnąć, czy zdarzenia A i B są niezależne.

Zadania 1, 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.