EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2005
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozpatrzmy populację, dla której funkcja $x(t)$, liczebność w chwili t, zadana jest przez równanie Gompertza

$$x'(t) = rx(t)\log\frac{K}{x(t)},$$

i poddanej odłowom o stałej intensywności. Znajdź maksymalny dopuszczalny odłów nie powodujący wymarcia całej populacji.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Funkcja $w : (\mathcal{A}\cup\{-\}) \times (\mathcal{A}\cup\{-\}) \to \mathbf{R}$ jest określona jako

$$\begin{aligned} w(a,a) &= 0, \\ w(a,b) &= 1, \text{dla} a \neq b \\ w(a,-) &= w(-,a) = 2. \end{aligned}$$

Odległość edycyjną d_w uzgodnienia $(\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*)$ sekwencji DNA, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, definiujemy jako

$$d_w(\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*) = \sum_{i=1}^{n} w(A_i^*,B_i^*),$$

gdzie $n = |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{B}^*|$ jest liczbą symboli w ciągach $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$.

Natomiast odległość edycyjną D_w miedzy sekwencjami DNA $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jako

$$D_w(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \min\{d_w(\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*) : (\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*) \text{ uzgodnienie sekwencji} (\mathbf{A},\mathbf{B})\}.$$

(i) Jaka jest odległość edycyjna sekwencji **CCTT** oraz **ACGCTT**?

(ii) Znajdź optymalne uzgodnienie dla tych ciągów.

Zadanie **3.** **(8 punktów)**

Pewna rzadka choroba wykrywana jest na podstawie analizy krwi. W celu zmniejszenia kosztów analiza pobranych od badanych próbek krwi przeprowadzana jest w następujący sposób.
Próbki krwi pochodzące od n badanych łączone są w jedną próbkę i przeprowadzany jest dla niej jeden test mający wykryć chorobę. W sytuacji gdy wynik testu okaże się dodatni, a więc w połączonej próbce znajduje się krew osoby chorej, przeprowadza się n oddzielnych testów dla każdej próbki wchodzącej w jej skład w celu zidentyfikowania osoby chorej.

(i) Zakładamy, że proporcja osób chorych w całej populacji jest równa π. Jaka jest średnia liczba testów potrzebnych do przeanalizowania Nn próbek krwi pochodzących od losowo wybranych osób?

(ii) W przypadku gdy $\pi = 1/20$ podaj wartość n liczby próbek, które powinny zostać zmieszane dla której średnia liczba testów niezbędnych do przebadania 20 próbek krwi jest najmniejsza.

Zadanie **4.** **(8 punktów)**

Mam w kieszeni dwie nieodróżnialne kostki do gry: jedna jest symetryczna, druga może mieć dowolne prawdopodobieństwa wypadnięcia poszczególnych ścianek. Interesuje mnie oszacowanie prawdopodobieństwa p wypadnięcia szóstki na drugiej kości. W tym celu wyciągam z kieszeni losowo jedną z tych kości i rzucam n-krotnie, notując ile razy wypadła szóstka. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru p. Zbadaj jego nieobciążoność. Oblicz granicę średniego błędu kwadratowego tego estymatora, gdy $n \to \infty$

Zadanie **5.** **(8 punktów)**

Dane jest równanie
$$x''(t) - 4x(t) = f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Znaleźć:

a) wszystkie rozwiązania tego równania dla $f(t) = t$,

b) wszystkie ograniczone rozwiązania tego równania dla $f(t) = \cos t$,

c) funkcję f tak, aby $x(t) = \sin t$ było rozwiązaniem tego równania.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2005
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1.** **(8 punktów)**

Zakład produkuje dwa wyroby, na które dzienne zapotrzebowanie wynosi łącznie od 60 do 100 sztuk. Wyroby te otrzymuje się z jednego podstawowego surowca (inne są dostępne bez ograniczeń), którego dzienne zużycie nie może przekraczać 240 jednostek, przy czym na sztukę wyrobu I potrzeba 6 jednostek surowca, a na sztukę wyrobu II – 2 jednostki tego surowca.
Wyznacz optymalny plan produkcji, wiedząc, że zysk jednostkowy dla wyrobu I wynosi 1 zł, a dla wyrobu II – 5 zł, przy czym ze względu na popyt ilość wyrobu I nie powinna być mniejsza od ilości wyrobu II.

Zadanie **2.** **(8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = P(T > x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 100$$

oraz spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).
Obliczyć JSN dla następującej renty (20)-latka: jeśli żyje on pod koniec pierwszego roku wypłata wynosi 100, jeśli żyje pod koniec drugiego roku wypłata wynosi 1000. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **3.** **(8 punktów)**

Niech X, Y będą dwiema niezależnymi szkodami. Szkoda X ma rozkład Poissona z parametrem 2, a szkoda Y rozkład Poissona z parametrem 3. Dla $Z = X + Y$ obliczyć:
1) $P(Z > 2)$;
2) $E(I_2(X))$, gdzie $I_d(X)$ oznacza kontrakt stop-loss.

Zadanie **4.** **(8 punktów)**

Mam w kieszeni dwie nieodróżnialne kostki do gry: jedna jest symetryczna, druga może mieć dowolne prawdopodobieństwa wypadnięcia poszczególnych ścianek. Interesuje mnie oszacowanie prawdopodobieństwa p wypadnięcia szóstki na drugiej kości. W tym celu wyciągam z kieszeni losowo jedną z tych kości i rzucam n-krotnie, notując ile razy wypadła szóstka. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru p. Zbadaj jego nieobciążoność. Oblicz granicę średniego błędu kwadratowego tego estymatora, gdy $n \to \infty$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dane jest równanie
$$x''(t) - 4x(t) = f(t),\ t \in \mathbb{R}.$$
Znaleźć:

a) wszystkie rozwiązania tego równania dla $f(t) = t$,

b) wszystkie ograniczone rozwiązania tego równania dla $f(t) = \cos t$,

c) funkcję f tak, aby $x(t) = \sin t$ było rozwiązaniem tego równania.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2005
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Mamy następującą funkcję napisaną w języku **C**

```
int F(int a,int b)
{
   int c;

   if(a<=0 || b<=0)
      return -1;
   do {
          c = a%b;
          if(!c)
             return b;
          a = b;
          b = c;
      } while(1);
   return -2;
}
```

określoną dla liczb całkowitych. Pytania:

1. Ile wynosi **F(42,66)** ?
2. Ogólnie, dla dowolnych liczb naturalnych **n,m** określić wartość **F(n,m)**.
3. Uzasadnić, dlaczego dla danych **n,m** funkcja **F(n,m)** zakończy swoje działanie.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

znaleźć (rozkład Choleskiego) macierz L – dolnie trójkątną, spełniającą:

$$A = LL^T.$$

Czy macierz A jest dodatnio określona?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dla zadanej tabelki liczb (x_i, y_i), $i = 0,1,2,3$

x	-1	0	2	4
y	0	1	0	1

wyznaczyć wielomian $p = p(x)$ o własności:

$$y_i = p(x_i), \quad i = 0,1,2,3.$$

Czy znaleziony wielomian jest wyznaczony jednoznacznie?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Mam w kieszeni dwie nieodróżnialne kostki do gry: jedna jest symetryczna, druga może mieć dowolne prawdopodobieństwa wypadnięcia poszczególnych ścianek. Interesuje mnie oszacowanie prawdopodobieństwa p wypadnięcia szóstki na drugiej kości. W tym celu wyciągam z kieszeni losowo jedną z tych kości i rzucam n-krotnie, notując ile razy wypadła szóstka. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru p. Zbadaj jego nieobciążoność. Oblicz granicę średniego błędu kwadratowego tego estymatora, gdy $n \to \infty$

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dane jest równanie

$$x''(t) - 4x(t) = f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Znaleźć:

a) wszystkie rozwiązania tego równania dla $f(t) = t$,

b) wszystkie ograniczone rozwiązania tego równania dla $f(t) = \cos t$,

c) funkcję f tak, aby $x(t) = \sin t$ było rozwiązaniem tego równania.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2005
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie
a) $172x+20y=100$,
b) $15x+45y+210z=1000$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dla $k=1,2,3$ niech P_k będą środkami boków trójkąta równobocznego i niech S_k oznacza symetrię środkową względem punktu P_k. Złożenie tych izometrii:

$$S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

jest obrotem — względem jakiego punktu i o jaki kąt? (Uzasadnić odpowiedź.)

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech o oznacza okrąg o równaniu $x^2+(y-3)^2=1$ i niech a oznacza prostą $y=0$. Punkty P leżące w tej samej odległości od o co od a tworzą parabolę. Wyznacz jej równanie; podaj jej ognisko i kierownicę.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Mam w kieszeni dwie nieodróżnialne kostki do gry: jedna jest symetryczna, druga może mieć dowolne prawdopodobieństwa wypadnięcia poszczególnych ścianek. Interesuje mnie oszacowanie prawdopodobieństwa p wypadnięcia szóstki na drugiej kości. W tym celu wyciągam z kieszeni losowo jedną z tych kości i rzucam n-krotnie, notując ile razy wypadła szóstka. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru p. Zbadaj jego nieobciążoność. Oblicz granicę średniego błędu kwadratowego tego estymatora, gdy $n \to \infty$

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dane jest równanie

$$x''(t)-4x(t)=f(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Znaleźć:

a) wszystkie rozwiązania tego równania dla $f(t)=t$,

b) wszystkie ograniczone rozwiązania tego równania dla $f(t)=\cos t$,

c) funkcję f tak, aby $x(t)=\sin t$ było rozwiązaniem tego równania.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2005
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech $\{B(t); t \geqslant 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna.
a) Znaleźć wszystkie $a > 0$, dla których
$$X_a(t) = \frac{B(\exp(t))}{\exp(at)}$$
jest procesem stacjonarnym. Dla znalezionych wartości a podać postać funkcji wartości oczekiwanej i kowariancji procesu $X_a(t)$.
b) Obliczyć $P(X_a(2005a) - X_a(a) > 0)$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ będą wzajemnie niezależnymi ciągami niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = 1/2$ oraz $P(Y_n = 1) = P(Y_n = 3) = 1/2$. Zbadać zbieżność
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$$
dla $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Na podstawie jednej obserwacji X weryfikuje się hipotezę *H: X ma rozkład jednostajny* $U(0,1)$ przeciwko hipotezie alternatywnej *K: X ma rozkład wykładniczy z parametrem* 1. Skonstruować najmocniejszy test na poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$. Wyznaczyć funkcję mocy tego testu.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład $\infty-$podzielny, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg i.i.d. zmiennych losowych $Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n}$, że
$$Y_{1,n} + Y_{2,n} + \ldots + Y_{n,n} =_{\mathrm{d}} X.$$
Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Wykazać, że $N(1)$ jest $\infty-$podzielny. Podać rozkład $Y_{1,n}$.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dane jest równanie
$$x''(t) - 4x(t) = f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$
Znaleźć:

a) wszystkie rozwiązania tego równania dla $f(t) = t$,

b) wszystkie ograniczone rozwiązania tego równania dla $f(t) = \cos t$,

c) funkcję f tak, aby $x(t) = \sin t$ było rozwiązaniem tego równania.