Zadanie 3. (3 punkty)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

na kwadracie $K = \{(x,y) : x,y \in [-1,1]\}$. Wyznaczyć wszystkie punkty kwadratu, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

ROZWIĄZANIE. I SPOSÓB.

Po pierwsze. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 + 2(x^2-1)(y^2-1) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = \\ &= (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1 + 1 = \\ &= \left((x^2+y^2) - 1\right)^2 + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

i równość $f(x,y) = 1$ zachodzi dla punktów okręgu $x^2 + y^2 = 1$, który (cały) zawarty jest w kwadracie K.

Po drugie. $x^2 + y^2$ jest kwadratem odległości punktu (x,y) od $(0,0)$, więc na kwadracie K przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\left[0, \sqrt{2}^2\right]$, zatem $x^2 + y^2 - 1$ na K przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-1,1]$, przy czym wartość 1 przyjmuje w wierzchołkach kwadratu a wartość -1 w środku. Stąd $f(x,y)$ na K przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[0^2+1, (\pm 1)^2 + 1]$, przy czym największą 2 w punktach: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

ROZWIĄZANIE. II SPOSÓB.

Funkcja f jest ciągła i K jest zwarty (domknięty i ograniczony podzbiór R^2), więc f osiąga swoje kresy na K. Zbadamy punkty wnętrza K i brzegu K.

$\diamondsuit$ *Wnętrze K.* f ma wszędzie pochodne cząstkowe, więc **może** przyjmować swoje kresy jedynie w tych punktach wnętrza K, w których **obie** się zerują:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 + 4x(y^2-1) = 0 \\ 4y^3 + 4y(x^2-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \cdot (x^2+y^2-1) = 0 \\ y \cdot (x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}.$$

Są to: $(0,0)$ i punkty okręgu $x^2+y^2 = 1$ (z wyjątkiem środków boków K).

Mamy: $f(0,0) = 2$. Zauważmy, że dla punktów okręgu $y^2 = 1 - x^2$ jest: $f(x,y) = x^4 + (1-x^2)^2 + 2(x^2-1)((1-x^2)-1) = x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 - 2x^4 + 2x^2 = 1$.

$\diamondsuit$ *Brzeg K.* Mamy $f(x,1) = x^4 + 1^4 + 2(x^2-1)(1^2-1) = x^4+1$, więc dla $x \in [-1,1]$ wartość najmniejsza 1 jest dla $x = 0$, a największa 2 dla $x = \pm 1$. Zatem na boku kwadratu $y = 1$ wartość najmniejsza 1 jest przyjęta w środku, a największa 2 na końcach tego boku. Tak samo jest na pozostałych bokach.

$\diamondsuit$ *Podsumowanie.* f może przyjmować swoje kresy tylko w punktach powyżej zbadanych, a w tych punktach przyjmuje tylko dwie wartości: 1 i 2, zatem:

f najmniejszą wartość na K równą 1 przyjmuje na okręgu $x^2 + y^2 = 1$,

f największą wartość na K równą 2 przyjmuje w pięciu punktach:

$(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.