Rozwiązanie zadania 4

O wektorach $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ wiemy, że

$$\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, z\rangle = \langle z, x\rangle = -\tfrac{1}{2}$$

gdzie $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Sposób pierwszy

Mamy wykazać, że istnieją takie liczby $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ że

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = (0, 0, 0).$$

Gdyby tak było (szukamy warunku koniecznego), to biorąc

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, \alpha x + \beta y + \gamma z\rangle = \\ &= \alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x, y\rangle + \gamma\langle x, z\rangle = \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma \end{aligned}$$

otrzymujemy, że musi być spełniony związek

$$\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 0.$$

Dla liczb $\alpha = \beta = \gamma = 1$ znaleziony warunek konieczny zachodzi! Ponadto mamy, że

$$\begin{aligned} &\|x + y + z\|^2 = \langle x + y + z, x + y + z\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \langle y, z\rangle + \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle + \|z\|^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0. \end{aligned}$$

A to oznacza, że

$$x + y + z = (0, 0, 0)$$

i wektory x, y, z są liniowo zależne.

Sposób drugi

O wektorze x, bez utraty ogólności możemy założyć, że jest postaci $x = (1, 0, 0)$.

Teraz mamy z równości $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}$, że $y_1 = -\frac{1}{2}$ i podobnie z $\langle z, x\rangle = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy $z_1 = -\frac{1}{2}$.

Z $\|y\| = \|z\| = 1$ i $\langle y, z\rangle = -\frac{1}{2}$ odpowiednio dostajemy:

$$\begin{aligned} y_2^2 + y_3^2 &= \frac{3}{4} \\ z_2^2 + z_3^2 &= \frac{3}{4} \\ y_2z_2 + y_3z_3 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Jasne jest teraz, iż:

$$
\begin{aligned}
&(y_2+z_2)^2+(y_3+z_3)^2 = \\
&= \quad y_2^2+y_3^2+z_2^2+z_3^2+2(y_2z_2+y_3z_3)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2\,\frac{3}{4}=0.
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy więc, że $z_2=-y_2$ i $z_3=-y_3$.

Mamy teraz:

$$x+y+z=(1,0,0)+(-\frac{1}{2},y_2,y_3)+(-\frac{1}{2},-y_2,-y_3)=(0,0,0)$$

co dowodzi, że układ wektorów x,y,z jest liniowo zależny.

Wrocław, dnia 18 lutego 2005