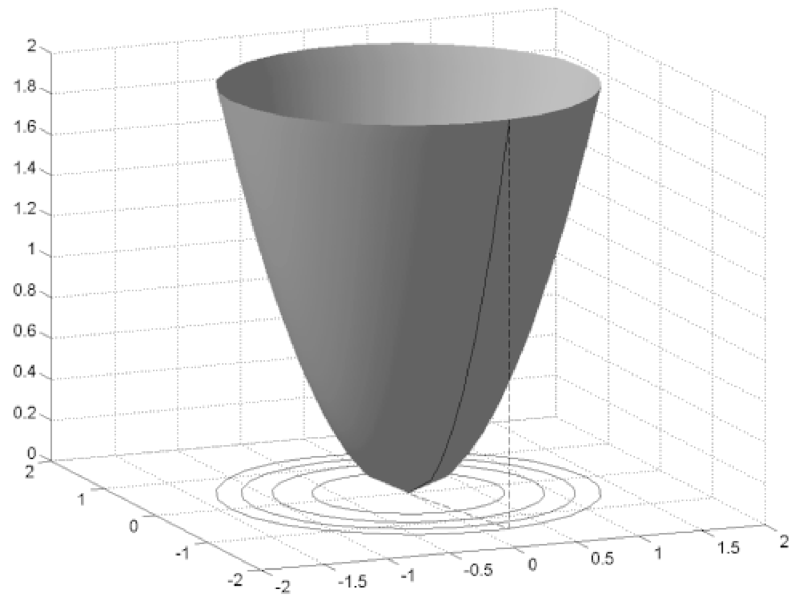
Rozwiązanie zadania 2

Mamy dla $A > 0$ obliczyć objętość bryły:

$$\{(x, y, z) : 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant A\} \subset \mathbb{R}^3$$

Jest to wnętrze paraboloidy obrotowej $z = x^2 + y^2$ (powierzchnia powstała przez obrót paraboli $z = x^2$ wokół osi $0z$) ograniczonej z góry płaszczyzną $z = A$.



Rysunek 1: Powierzchnia $\{(x, y, z) : 0 \leqslant x^2 + y^2 = z \leqslant A\}$ dla $A = 2$.

Kilka sposobów w jaki można obliczyć objętość rozważanej bryły.

1. Według wzoru:
$$V = \int_0^A S(p)\,dp$$
gdzie $S(p)$ jest polem przekroju rozważanej bryły z płaszczyzną $z = p \geqslant 0$. Przekrojem tym jest koło o pramieniu $\sqrt{p}$, tak więc $S(p) = \pi p$. Stąd mamy, że
$$V = \int_0^A \pi p\,dp = \pi \frac{p^2}{2}\Big|_0^A = \frac{1}{2}A^2\pi.$$

2. Wzór na ojętość bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $z = f(x)$ wokół osi Oz:
$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{A}} x f(x)\,dx.$$

U nas $z = x^2$ skąd otrzymujemy

$$V = \pi(\sqrt{A})^2 A - 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{A}} x\, x^2\, dx = \pi A^2 - 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{A}} = \frac{1}{2} A^2 \pi,$$

gdzie $\pi(\sqrt{A})^2 A$ jest objętością walca o promieniu $\sqrt{A}$ i wysokości A.

3. Podobnie jak poprzednio, ojętość bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji $x = g(z)$ wokół osi $0z$ z tym, że całkujemy wzdłuż osi $0z$:

$$V = \pi \int\limits_0^A [g(z)]^2\, dz.$$

W sytuacji naszej bryły mamy $g(z) = \sqrt{z}$ i dalej

$$V = \pi \int\limits_0^A \left(\sqrt{z}\right)^2 dz = \pi \frac{z^2}{2}\Big|_0^A = \frac{1}{2} A^2 \pi.$$

4. Z definicji całki podwójnej:

$$V = \pi A^2 - \int\limits_{\{(x,y): x^2+y^2 \leqslant \sqrt{A}\}} x^2 + y^2\, dx\, dy$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych ($x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi$) otrzymujemy:

$$\int\limits_{\{(x,y): x^2+y^2 \leqslant \sqrt{A}\}} x^2 + y^2\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{[0,2\pi]\times[0,\sqrt{A}]} r^2 \cdot r\, d\varphi\, dr = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{A}} r^3 dr\, d\varphi = 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{A}} = \frac{1}{2} A^2 \pi.$$

I ostatecznie

$$V = \pi A^2 - \frac{1}{2} A^2 \pi = \frac{1}{2} A^2 \pi.$$

Wrocław, dnia 17 lutego 2005