Rozwiązanie zadania 1

Nierówność

$$T(n) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

będziemy dowodzić *indukcyjnie* tzn.

$$\Big(T(1) \land \forall_{n\in\mathbb{N}}\, T(n) \Rightarrow T(n+1)\Big) \Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\, T(n)$$

Dla $n = 1$ mamy:

$$T(1) \equiv \binom{2\cdot 1+2}{1} \leqslant 4^1 \equiv \frac{4!}{1!\,3!} \leqslant 4 \equiv \mathbf{1} \quad \text{– prawda.}$$

Teraz dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ dowód wynikania:

$$T(n) \Rightarrow T(n+1)$$

Mamy

$$\binom{2(n+1)+2}{n+1} =$$

$$= \binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!\,(2n+4-n-1)!} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!\,(n+3)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)!}{n!\,(2n+2-n)} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} = \binom{2n+2}{n}\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}$$

Wykażemy teraz, że:

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4, \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A jest tak, bo:

$$\begin{gathered}(2n+3)(2n+4) \leqslant 4(n+1)(n+3)\\ 4n^2+14n+12 \leqslant 4n^2+16n+12\\ 0 \leqslant 2n\end{gathered}$$

Skąd, przy założeniu $T(n) \equiv \mathbf{1}$ mamy:

$$T(n+1) \equiv$$

$$\equiv \binom{2(n+1)+2}{n+1} \leqslant 4^{n+1} \equiv \binom{2n+2}{n}\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4^n \cdot 4 \equiv$$

$$\equiv \binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n \equiv T(n) \equiv \mathbf{1}$$

□

Wrocław, dnia 18 lutego 2005