Wersja testu **A** 14 lutego 2005r.

1. Dane są liczby niewymierne dodatnie x, y. Czy stąd wynika, że

a) liczba $x+y$ jest niewymierna;

b) co najmniej jedna z liczb $x{\cdot}y$ oraz x/y jest niewymierna;

c) co najmniej jedna z liczb $x{+}y$ oraz $x{-}y$ jest niewymierna;

d) liczba $x-y$ jest niewymierna?

2. Czy ciąg (a_n) określony podanym wzorem ma granicę skończoną

a) $a_n = (-1)^n \cdot n$;

b) $a_n = (-1)^{n^2+n}$;

c) $a_n = n^{(-1)^n}$;

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$?

3. Czy zbieżny jest szereg

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{7^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\binom{2n}{n}}$?

4. Czy podana liczba jest dodatnia

a) $\sin 13$;

b) $\sin 9$;

c) $\sin 15$;

d) $\sin 11$?

5. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest implikacja

a) $|x| \leqslant y \Rightarrow -y \leqslant x$;

b) $x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$;

c) $|x| \geqslant y \Rightarrow -y \geqslant x$;

d) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$?

6. Czy funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x > 1 \\ ax + b & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $x = 1$, jeżeli

a) $a = -1,\ b = 2$;

b) $a = 2,\ b = 1$;

c) $a = 1,\ b = 2$;

d) $a = 2,\ b = -1$?

7. Czy prawdziwa jest równość

a) $\displaystyle\int_7^{13} \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \ln 3$;

b) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \ln 2$;

c) $\displaystyle\int_{14}^{20} \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \ln 2$;

d) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \ln 3$?

8. Niech $f(x) = x^5 + x$. Czy istnieje taka liczba $x_0 \in [1,2]$, że

a) $f(x_0) = 2^\pi$;

b) $f(x_0) = 7\pi$;

c) $f(x_0) = \sqrt{3}$;

d) $f(x_0) = 37$?

9. Czy jest prawdą, że

a) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{b\in\mathbb{R}}\forall_{c\in\mathbb{R}}\exists_{d\in\mathbb{R}}\forall_{z\in\mathbb{R}}\ z\neq a+b+c+d$;

b) $\exists_{a\in\mathbb{R}}\forall_{b\in\mathbb{R}}\exists_{c\in\mathbb{R}}\forall_{d\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\ z=a+b+c+d$;

c) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{b\in\mathbb{R}}\forall_{c\in\mathbb{R}}\exists_{d\in\mathbb{R}}\forall_{z\in\mathbb{R}}\ z>a+b+c+d$;

d) $\exists_{a\in\mathbb{R}}\forall_{b\in\mathbb{R}}\exists_{c\in\mathbb{R}}\forall_{d\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\ z<a+b+c+d$?

10. Niech $z=\sqrt{3}+i$. Czy wtedy

a) $\mathrm{Re}\,(z^{22})\geqslant 0$;

b) $\mathrm{Re}\,(z^{21})\geqslant 0$;

c) $\mathrm{Re}\,(z^{15})\geqslant 0$;

d) $\mathrm{Re}\,(z^{5})\geqslant 0$?

11. Dany jest układ 17 równań liniowych **jednorodnych** z 4 niewiadomymi. Wiadomo, że wektory (1,0,0,0) i (0,1,0,0) są rozwiązaniami danego układu równań, a wektory (0,0,1,0) i (0,0,0,1) nie są rozwiązaniami układu równań. Czy stąd wynika, że

a) wektor (0,0,0,2) nie jest rozwiązaniem danego układu równań ;

b) wektor (1,1,1,0) nie jest rozwiązaniem danego układu równań ;

c) wektor (1,2,0,0) jest rozwiązaniem danego układu równań ;

d) wektor (0,0,1,1) nie jest rozwiązaniem danego układu równań ?

12. Czy podany wektor przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową o współczynnikach rzeczywistych wektorów (3,3,3), (4,4,6) i (6,6,12)

a) (6,3,3) ;

b) (15,16,18) ;

c) (0,0,7) ;

d) (1,1,0) ?

13. Czy podany wektor jest wektorem własnym macierzy
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
a) (0,0,1) ;
b) (1,2,0) ;
c) (1,1,2) ;
d) (0,2,0) ?

14. Czy rząd podanej macierzy jest równy 2

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

15. Czy w dowolnej grupie rzędu 4 istnieje element rzędu
a) 4 ;
b) 3 ;
c) 2 ;
d) 1 ?

16. Czy podany zbiór jest podgrupą grupy $\{0,1,2,3,4,5\}$ z dodawaniem modulo 6

a) $\{1,2,4\}$;

b) $\{0,3\}$;

c) $\{0,1\}$;

d) $\{0,2,4\}$?

17. Niech P będzie pierścieniem funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ o wartościach rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem punktowym jako działaniami. Czy ideałem pierścienia P jest

a) $\{f \in P\colon\, f(7)=0\}$;

b) zbiór wielomianów stopnia mniejszego od 7;

c) zbiór funkcji stałych;

d) $\{f \in P\colon\, f(0)=7\}$?

18. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy (bez zwracania) dwie kule. Czy prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule są białe, jest równe 1/2, jeżeli

a) $b=3,\ c=1$;

b) $b=15,\ c=6$;

c) $b=11,\ c=4$;

d) $b=7,\ c=3$?

19. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech P_n będzie prawdopodobieństwem, że orzeł wypadł dokładnie jeden raz. Czy wtedy

a) $P_4 \leqslant 1/4$;

b) $P_3 \leqslant 1/3$;

c) $P_6 \leqslant 1/10$;

d) $P_5 \leqslant 1/6$?

20. Przy rzucie specjalnie spreparowaną kostką do gry, szóstka wypada z prawdopodobieństwem p, a liczby 1,2,3,4,5 wypadają z jednakowymi prawdopodobieństwami. Niech $E(p)$ będzie wartością oczekiwaną liczby wyrzuconych oczek w pojedynczym rzucie. Czy wtedy

a) $E(0.3) \leqslant 3.875$;

b) $E(0.1) \leqslant 3.25$;

c) $E(0.4) \leqslant 4.25$;

d) $E(0.2) \leqslant 3.6$?