EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
14.02.2005

Zadanie **1.** Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Zadanie **2.** Obliczyć objętość bryły

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant z \leqslant A\}$$

w zależności od parametru dodatniego A.

Zadanie **3.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x^4+y^4+2(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

na kwadracie $K = \{(x,y) : x,y \in [-1,1]\}$. Wyznaczyć wszystkie punkty kwadratu, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **4.** Wektory $x,y,z \in \mathbb{R}^3$ spełniają warunki

$$\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$$

$$\langle x,y\rangle = \langle y,z\rangle = \langle z,x\rangle = -\frac{1}{2},$$

gdzie $\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ jest iloczynem skalarnym wektorów x i y, natomiast $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ jest długością wektora x.

Dowieść, że wektory x, y oraz z są liniowo zależne.

Zadanie **5.** W grupie G dla dowolych elementów a i b zachodzi równość

$$ab = b^3a^3 .$$

Dowieść, że grupa G jest abelowa (przemienna).

Zadanie **6.** W losowaniu Multilotka losuje się zbiór 20 różnych liczb spośród liczb 1, 2, 3, ..., 80.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród liczb wylosowanych w pojedynczym losowaniu Multilotka są jednocześnie liczby 1, 2, 3.

b) Niech E będzie wartością oczekiwaną liczby trójek kolejnych liczb wylosowanych w pojedynczym losowaniu Multilotka. Zastanawiamy się, czy widząc wyniki losowania Multilotka powinniśmy się dziwić znajdując trzy kolejne liczby. W tym celu rozstrzygnąć, czy E jest mniejsze, większe czy równe 1.

Uwaga: Jeżeli wylosowano np. liczby 5, 6, 7, 8, to uważamy, ze wylosowano co najmniej dwie trójki kolejnych liczb: 5,6,7 i 6,7,8.