EGZAMIN DYPLOMOWY, część II
26.06.2004

Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozważmy populację, która znajduje się w warunkach równowagi Hardy'ego-Weinberga. Wiemy, ze częstość allelu **a** dla locus o dwu możliwych alleleach, **A** i **a**, wynosi w tej populacji $0,1$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oboje rodzice osobnika o genotypie **aa** pochodzący z tej populacji są również genotypu **aa**?

Zadanie **2. (8 punktów)**
Przyjmijmy, ze mutacje nukleotydów w DNA następują zgodnie z modelem Jukes--Cantora z parametrem mutacji $\alpha = 0{,}05$, a wiec substytucje nukleotydów opisane są przez łańcuch Markowa o macierzy przejść w jednym kroku postaci

$$\begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

Jaką frakcję poszczególnych nukleotydów będziemy obserwować, w tak ewoluującym DNA , po upływie długiego czasu?

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rzucamy trzy razy symetryczną koscią do gry. Jeśli wypandnie k razy parzysta liczba oczek, to wygrywamy $2k$ złotych, gdzie $k = 0,1,2,3$. Ile powinna wynosić opłata za grę, aby gra była sprawiedliwa, tzn. wartość oczekiwana wygranej była równa zeru.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zakażenie *E. canis* jest chorobą psów przenoszoną przez kleszcze, która czasami atakuje ludzi. U zakażonych tą chorobą ludzi rozkład liczby białych ciałek krwi posiada nieznaną średnia μ i odchylenie standardowe σ. W całej populacji średnia liczba białych krwinek jest równa $7250/mm^3$. Sądzi się, że ludzie zakażeni przez *E. canis* powinni w średniej mieć obniżoną liczbę białych ciałek krwi.
Dla próby 15 elementowej zakażonych ludzi, średnia liczba białych ciałek krwi jest równa $\bar{x} = 4767/mm^3$ a odchylenie standardowe $s = 3204/mm^3$.

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,95 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej liczby białych ciałek krwi w populacji ludzi zakażonych na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II
26.06.2004

Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Według kierownika 24-godzinnej restauracji zapotrzebowanie na liczbę osób personelu w poszczególnych okresach doby przedstawia się następująco:
w godzinach 3.00 – 7.00 : 2 osoby,
w godzinach 7.00 – 11.00 : 10 osób,
w godzinach 11.00 – 15.00 : 14 osób,
w godzinach 15.00 – 19.00 : 8 osób,
w godzinach 19.00 – 23.00 : 10 osób,
w godzinach 23.00 – 3.00 : 3 osoby.
Każda z osób obsługujących klientów pracuje 8 godzin. Zadaniem kierownika jest ustalenie liczby osób personelu rozpoczynających pracę na początku wyżej wymienionych okresów tak, by potrzeby były zaspokojone, a całkowita liczba osób obsługujących klientów w ciągu doby minimalna.

Ułóż odpowiednie zadanie programowania liniowego i sprawdź, czy jego rozwiązanie dopuszczalne $\mathbf{x} = (0,14,0,8,2,2)$ jest także optymalne.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x) = P(T > x) = 1 - \frac{x}{110}$ dla $x \in [0,110]$.
1) Obliczyć ${}_3p_{30}$.
2) Wyznaczyć JSN dla czystego ubezpieczenia na dożycie na 2 lata dla osoby w wieku 50 lat. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Załóżmy, że niezależne szkody X_i, $i \geqslant 1$ $(X_0 = 0)$ mają rozkład równomierny na zbiorze $\{0,2,4\}$. Niech ilość szkód N ma rozkład Poissona z parametrem 2 oraz $S = \sum_0^N X_i$.
1) Obliczyć $P(S=0)$.
2) Obliczyć ES.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Zakażenie *E. canis* jest chorobą psów przenoszoną przez kleszcze, która czasami atakuje ludzi. U zakażonych tą chorobą ludzi rozkład liczby białych ciałek krwi posiada nieznaną średnia μ i odchylenie standardowe σ. W całej populacji średnia liczba białych krwinek jest równa $7250/mm^3$. Sądzi się, że ludzie zakażeni przez *E. canis* powinni w średniej mieć obniżoną liczbę białych ciałek krwi.
Dla próby 15 elementowej zakażonych ludzi, średnia liczba białych ciałek krwi jest równa $\bar{x} = 4767/mm^3$ a odchylenie standardowe $s = 3204/mm^3$.

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,95 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej liczby białych ciałek krwi w populacji ludzi zakażonych na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II
26.06.2004

Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**

Mamy dwa bardzo podobne do siebie programy:

```
// program A

#include <stdio.h>
#include <malloc.h>

void ProcA(int *n) {
   n = (int *)malloc(sizeof(int));
   *n = 5;
}

int main() {
   int *i,j;

   j = 7;
   i = &j;
   ProcA(i);
   printf("A: %i\n\n",*i);
   free(i);
   return 0;
}
```

```
// program B

#include <stdio.h>
#include <malloc.h>

void ProcB(int **n) {
   *n = (int *)malloc(sizeof(int));
   **n = 5;
}

int main() {
   int *i,j;

   j = 7;
   i = &j;
   ProcB(&i);
   printf("B: %i\n\n",*i);
   free(i);
   return 0;
}
```

Pytania:

(a) Czy uda się ich obu kompilacja?

(b) Jaki będzie ich wynik działania – co zostanie wyświetlone? O ile są formalnie poprawne!

(c) Przedyskutować działanie funkcji: **void ProcA(int *n)** i **void ProcB(int **n)**. Czy działanie każdej z nich ma to samo znaczenie w programie, w którym jest użyta?

(d) Czy użycie funkcji **free(i)** w obu programach jest poprawne?

Zadanie **2. (8 punktów)**

W komputerach IBM PC obliczanie odwrotności $\frac{1}{a}$ liczby $a > 0$ odbywa się iteracyjnie:

$$x_{n+1} = x_n + (1 - a x_n) x_n.$$

Dobierając odpowiednio funkcję $y = f(x)$, dla której $f(\frac{1}{a}) = 0$ wykazać, że podany ciąg jest z *metody Newtona*. Uzasadnić, dlaczego dla dowolnego punktu startowego $x_0 > 0$ ciąg ten jest zbieżny.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $T_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ będzie ciągiem wielomianów *Czebyszewa pierwszego rodzaju*

$$T_n(x)=\begin{cases} 1, & n=0 \\ x, & n=1 \\ 2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), & 1<n \end{cases}$$

Wykazać, że dla $n\neq m$ zachodzi

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Zakażenie *E. canis* jest chorobą psów przenoszoną przez kleszcze, która czasami atakuje ludzi. U zakażonych tą chorobą ludzi rozkład liczby białych ciałek krwi posiada nieznaną średnia μ i odchylenie standardowe σ. W całej populacji średnia liczba białych krwinek jest równa $7250/mm^3$. Sądzi się, że ludzie zakażeni przez *E. canis* powinni w średniej mieć obniżoną liczbę białych ciałek krwi.

Dla próby 15 elementowej zakażonych ludzi, średnia liczba białych ciałek krwi jest równa $\bar{x}=4767/mm^3$ a odchylenie standardowe $s=3204/mm^3$.

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,95 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej liczby białych ciałek krwi w populacji ludzi zakażonych na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II
26.06.2004

Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Wyznaczyć wszystkie rozwiązania w liczbach naturalnych x,y układu równań

$$\begin{cases} \mathrm{NWD}(x,y) & = & 10 \\ \mathrm{NWW}(x,y) & = & 600^n \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru naturalnego n, $n \geqslant 1$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
W trójkącieABC dwusieczne kątów α i β przecinają przeciwległe boki w punktach K i L (odpowiednio). Niech $P_1 =$ pole ΔABK, $P_2 =$ pole ΔACK, $P_3 =$ pole ΔBAL, $P_4 =$ pole ΔBCL. Znając stosunki pól: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{4}$, $\frac{P_3}{P_4} = \frac{3}{2}$, obliczyć cosinus kąta α.

Zadanie **3. (8 punktów)**
W (dowolnym) czworościanie $ABCD$ środki ciężkości jego ścian wyznaczają czworościan $PQRS$. Wyznaczyć stosunek pól powierzchni tych czworościanów.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zakażenie *E. canis* jest chorobą psów przenoszoną przez kleszcze, która czasami atakuje ludzi. U zakażonych tą chorobą ludzi rozkład liczby białych ciałek krwi posiada nieznaną średnia μ i odchylenie standardowe σ. W całej populacji średnia liczba białych krwinek jest równa $7250/mm^3$. Sądzi się, że ludzie zakażeni przez *E. canis* powinni w średniej mieć obniżoną liczbę białych ciałek krwi.
Dla próby 15 elementowej zakażonych ludzi, średnia liczba białych ciałek krwi jest równa $\bar{x} = 4767/mm^3$ a odchylenie standardowe $s = 3204/mm^3$.

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,95 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej liczby białych ciałek krwi w populacji ludzi zakażonych na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Znajdź rozwiązanie układu równań różniczkowych
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
z warunkiem początkowym
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II
26.06.2004

Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (10 punktów)**
Grupa G wektorów na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych (z działaniem dodawania) zawiera podgrupę H składającą się z wektorów o obu współrzędnych parzystych i dających w sumie liczbę podzielną przez 12.

(a) [5 punktów] Znajdź rząd grupy ilorazowej G/H.

(b) [5 punktów] Znajdź rozkład grupy G/H w produkt prosty grup cyklicznych.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Dla dowolnego $\alpha > 0$ i dowolnego $p \geqslant 1$ znajdź normę funkcjonału $I_\alpha : L^p[0,1] \to \mathbb{R}$ zadanego wzorem

$$I_\alpha(f) = \int_0^1 x^\alpha f(x)\, dx \,.$$

Zadanie **3. (10 punktów)**
Cząstka błądzi losowo po zbiorze liczb naturalnych (z zerem) zgodnie z następującymi regułami:

(a) w chwili $t = 0$ cząstka znajduje się w położeniu $x = 0$;

(b) w chwilach $t = 1, 2, \ldots$ cząstka zmienia położenie z x na $x+1$ z prawdopodobieństwem p, gdzie $0 < p < 1$, zaś pozostaje w tym samym położeniu z prawdopodobieństwem $1-p$;

(c) w pozostałych chwilach nic się nie dzieje.

Niech $P_n(k)$ oznacza prawdopodobieństwo, że tuż po chwili $t = n$ cząstka znajduje się w położeniu $x \leqslant k$. Udowodnij, że dla każdego k

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = 0 \,.$$

Zadanie **4. (10 punktów)**
Wypukły domknięty zbiór K w $\mathbb{R}^n$ ma n-wymiarową miarę Lebesgue'a $V > 0$ oraz spełnia następującą własność: dla każdego kierunku w $\mathbb{R}^n$ istnieje $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna H prostopadła do tego kierunku taka, że $(n-1)$-wymiarowa miara przekroju $H \cap K$ jest nie mniejsza niż $S > 0$. Uzasadnij, że średnica zbioru K nie przekracza $n \cdot (V/S)$.

Uwaga. Jeśli nie potrafisz w pełnej ogólności, rozwiąż zadanie dla przypadku $n = 3$, za co otrzymasz do 6 pkt. na 10 możliwych za pełne rozwiązanie.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II
26.06.2004

Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B_1(t); t \geqslant 0\}, \{B_2(t); t \geqslant 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.
a) Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a takie, że $B(t) = aB_1(t) + B_2(at)$ jest standardowym ruchem Browna.
b) Obliczyć $P(B_1(2004) > 2004B_2(1))$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech X_i, $i \geqslant 1$ będą jednakowo rozłożonymi niezależnymi zmiennymi losowymi o ciągłej dystrybuancie F. Zbadać zbieżność według rozkładu dla

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2F(X_i) - 1}{\sqrt{n}},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Znaleźć nieobciążony estymator o minimalnej wariancji parametru μ na podstawie n-elementowej próby z populacji, w której badana cecha X ma rozkład $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in R$, $\sigma^2 > 0$. Odpowiedź uzasadnić cytując odpowiednie twierdzenia.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Proces stochastyczny $\{X(t); t \geqslant 0\}$ nazywamy stochastycznie ciągłym, gdy dla każdego $t_0 \in [0, \infty)$ oraz każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to t_0} P(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0.$$

a) Czy proces Poissona jest stochastycznie ciągły?
b) Niech $\{X(t); t \geqslant 0\}$, $\{Y(t); t \geqslant 0\}$ będą dwoma stochastycznie ciągłymi procesami stochastycznymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.
Czy $\{X(t) + Y(t); t \geqslant 0\}$ jest stochastycznie ciągły?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$