

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)**  
**22.06.2004**

*Zadanie* **1.** (3 punkty)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

*Zadanie* **2.** (4 punkty)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2$$

na kole

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

*Zadanie* **3.** (3 punkty)

Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx.$$

*Zadanie* **4.** (3 punkty)

Podać przykład macierzy o wymiarach  $3 \times 3$ , której wielomian charakterystyczny jest równy  $-x^3 + x^2$ , a rząd jest równy 2.

*Zadanie* **5.** (3 punkty)

W grupie  $G$  dla dowolnych elementów  $a$  i  $b$  zachodzi równość

$$aba = bab.$$

Dowieść, że grupa  $G$  jest jednoelementowa.

*Zadanie* **6.** (4 punkty)

W urnie znajduje się 100 jednakowych monet prawdziwych i jedna moneta fałszywa. Możemy podać dowolną liczbę  $k$  między 0 i 101 (włączając 0 i 101). Wówczas z urny zostanie wylosowanych  $k$  monet. Jeśli wszystkie wylosowane monety okażą się prawdziwe, wygrywamy je. Jeśli natomiast wśród wylosowanych monet znajdzie się moneta fałszywa, nie dostajemy nic.

Jak należy wybrać liczbę  $k$ , aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną wygranej?