Wersja testu **A** 22 czerwca 2004r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$;

b) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$;

c) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$;

d) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$?

2. Niech (a_n) będzie ciągiem określonym wzorem $a_n=(-1)^n$ oraz niech $g=1$. Czy wtedy

a) $\exists_{\varepsilon>0}\forall_{N}\forall_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$;

b) $\exists_{\varepsilon>0}\forall_{N}\exists_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$;

c) $\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N}\exists_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$;

d) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N}\forall_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$?

3. Czy $\cos x=\frac{1}{2}$, jeżeli

a) $x=\dfrac{\pi}{3}$;

b) $x=\dfrac{2\pi}{3}$;

c) $x=\dfrac{5\pi}{3}$;

d) $x=\dfrac{\pi}{6}$?

4. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\log_5(\sqrt{2}-1)>\log_5(\sqrt{3}-1)$;

b) $\log_\pi e>\log_e\pi$;

c) $\log_3 4>\log_5 8$;

d) $\log_3 2\sqrt{2}>\log_9 7$?

5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Czy możemy wywnioskować, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeśli wiemy ponadto, że

a) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n \geqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

b) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

c) ciąg (a_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

d) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$?

6. Czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ ax+b & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases},$$

gdzie

a) $a=-1,\ b=2$;

b) $a=2,\ b=-1$;

c) $a=1,\ b=2$;

d) $a=2,\ b=1$?

7. O funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wiadomo, że

$$f'(x) \begin{cases} >0 & \text{dla} \quad x\in(2,8) \\ =0 & \text{dla} \quad x\in\{2,8\} \\ <0 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,2)\cup(8,\infty) \end{cases}.$$

Czy stąd wynika, że

a) $f(-50) > f(50)$;

b) $f(1) < f(8)$;

c) $f(-100) > f(0)$;

d) $f(3) < f(7)$?

8. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x,y zachodzi nierówność

a) $x^2y^2 \leqslant x^3+y^3$;

b) $xy^2 \leqslant x^3+y^3$;

c) $xy \leqslant x^2+y^2$;

d) $x^2y^3 \leqslant x^6+y^6$?

9. Czy podana funkcja ma lokalne minimum w punkcie $(0,0)$

a) $f(x,y)=x^2+7xy-13y^2$;

b) $f(x,y)=x^2+7xy+12y^2$;

c) $f(x,y)=x^2+7xy+13y^2$;

d) $f(x,y)=x^2-7xy+13y^2$?

10. Czy liczba 1 jest elementem zbioru

a) $\{\cos x : x \in (0,6)\}$;

b) $\{\mathrm{arctg}\, x : x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{\ln x : x \in (0,\infty)\}$;

d) $\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$?

11. Czy podany zbiór z działaniem jest grupą

a) $\{0, 2, 4, 6\}$ z mnożeniem modulo 8 ;

b) $\{0, 2, 4, 6\}$ z dodawaniem modulo 8 ;

c) $\{0, 2, 4, 6\}$ z dodawaniem modulo 7 ;

d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ z mnożeniem modulo 7 ?

12. Czy podany zbiór jest podpierścieniem pierścienia wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych

a) zbiór wielomianów stopnia nie większego niż 6 ;

b) zbiór wielomianów będących funkcjami nieparzystymi ;

c) zbiór wielomianów stopnia nie większego niż 5 ;

d) zbiór wielomianów będących funkcjami parzystymi ?

13. Macierz kwadratowa A o wymiarach 2×2 ma wszystkie wyrazy całkowite, a jej wyznacznik jest równy -17. Czy na podstawie tych informacji możemy z całą pewnością stwierdzić, że

a) co najmniej jeden wyraz macierzy A jest ujemny ;

b) co najmniej jeden wyraz macierzy A jest nieparzysty ;

c) co najmniej jeden wyraz macierzy A jest parzysty ;

d) co najmniej jeden wyraz macierzy A jest różny od zera ?

14. Dany jest układ trzech równań liniowych **jednorodnych** z trzema niewiadomymi x,y,z. Wiadomo, że jednym z równań układu jest równanie

$$x+y+z=0$$

oraz że trójka $(x,y,z)=(1,-1,0)$ jest rozwiązaniem danego układu. Czy stąd wynika, że

a) trójka $(x,y,z)=(3,-2,-1)$ nie jest rozwiązaniem układu równań ;

b) trójka $(x,y,z)=(2,-1,-1)$ jest rozwiązaniem układu równań ;

c) trójka $(x,y,z)=(3,-3,0)$ jest rozwiązaniem układu równań ;

d) trójka $(x,y,z)=(3,-2,1)$ nie jest rozwiązaniem układu równań ?

15. Czy jedną z wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ jest liczba

a) -1 ;

b) 1 ;

c) 3 ;

d) -2 ?

16. Czy zbiór rozwiązań zespolonych z podanego równania jest okręgiem

a) $z+\overline{z}=z\overline{z}+3$;

b) $z+\overline{z}=3$;

c) $z\overline{z}=z+\overline{z}+3$;

d) $z\overline{z}=3$?

17. Czy w grupie cyklicznej $\mathbb{Z}_n$ (zbiór $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ z dodawaniem modulo n) liczba 6 jest elementem rzędu n, jeżeli

a) $n=30$;

b) $n=45$;

c) $n=40$;

d) $n=35$?

18. Losujemy liczbę k ze zbioru $\{1,2,\dots,n\}$, a następnie liczbę ℓ ze zbioru $\{1,2,\dots,k\}$. Niech E_n będzie wartością oczekiwaną liczby ℓ. Czy wtedy

a) $E_2=3/2$;

b) $E_5=2$;

c) $E_4=7/4$;

d) $E_3=2$?

19. Wykonano n rzutów kostką do gry. Niech E_n będzie wartością oczekiwaną sumy liczb oczek wyrzuconych we wszystkich rzutach. Czy wtedy

a) $E_2<8$;

b) $E_1<5$;

c) $E_4>14$;

d) $E_3>10$?

20. Rzucamy 3 razy fałszywą monetą, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem 2/3, a reszka z prawdopodobieństwem 1/3. Niech p_k będzie prawdopodobieństwem, że wypadło dokładnie k orłów. Czy wtedy

a) $p_3 < 1/3$;

b) $p_0 < 1/9$;

c) $p_2 < 4/9$;

d) $p_1 < 2/9$?