Rozwiązania:

Zad. 1

Mamy:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

więc

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

i stosujemy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

Promień zbieżności wynosi: $R = 4$.

Zad. 2

Zauważamy, że

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2 \geqslant 0.$$

Stąd *najmniejsza* wartość funkcji

$$f(x,y) = 0 \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x,y) : y = -2x\}.$$

Dalej mamy

$$f_x(x,y) = 4(2x+y), \quad \text{oraz} \quad f_y(x,y) = 2(2x+y)$$

skąd otrzymujemy, że

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0 \quad \text{dla} \quad y = -2x$$

czyli tam, gdzie funkcja $z = f(x,y)$ przyjmuje najmniejszą wartość. Pozostaje jeszcze rozpatrzeć brzeg obszaru

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Niech

$$g(x,y) = x^2 + y^2.$$

Teraz mamy

$$\nabla f(x,y) = (4(2x+y), 2(2x+y)) \quad \text{oraz} \quad \nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

Oczywiście

$$\nabla g(x,y) \neq (0,0) \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Z metody *mnożników Lagrange'a*, otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &=& 1, \\ 4\,(2x+y) &=& 2\,\lambda\, x, \\ 2\,(2x+y) &=& 2\,\lambda\, y. \end{cases}$$

Z dwóch ostatnich równości mamy

$$\lambda\, x = 2\,\lambda\, y.$$

Skąd $\lambda = 0$ i wtedy $y = -2x$ co już rozważaliśmy, lub też $\lambda \neq 0$ a wtedy

$$x = 2\,y.$$

Dalej (pamiętamy, że x i y mają te same znaki) z pierwszego równania dostajemy

$$1 = (2y)^2 + y^2 = 5y^2$$

i ostatecznie

$$y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

i odpowiednio

$$x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Podejrzanymi parami o ekstremum są:

$$\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, \tfrac{\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{i} \quad \left(-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Sprawdzamy, że

$$f\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, \tfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = f\left(-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \left(2\tfrac{2\sqrt{5}}{5} + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 5$$

co jest *największą* wartością funkcji.

Zad. 3

Zmieniamy kolejność całkowania (najlepiej zobaczyć na rysunku), aby otrzymać:

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\, dy\, dx \;=$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 e^{y^2} \cdot x\Big|_0^{\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{4}\int_0^2 2y\, e^{y^2}\, dy = \frac{1}{4} e^{y^2}\Big|_0^2 = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

Zad. 4

Przypomnienie równania na wartości własne $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0.$$

W zadaniu jest

$$-x^3 + x^2 = x^2(1 - x).$$

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2.$$

Zad. 5

Do równania

$$aba = bab$$

podstawiamy

$$b = a^{-1}$$

i otrzymujemy, że

$$a\,(a^{-1}a) = a^{-1}(a\,a^{-1})$$

skąd mamy

$$a = a^{-1} \quad \text{lub} \quad a^2 = e.$$

Teraz równanie $aba = bab$ mnożymy lewostronnie przez a i odpowiednio rozstawiamy nawiasy

$$(aa)ba = (ab)(ab) \quad \text{lub inaczej} \quad a^2ba = (ab)^2$$

a to oznacza, że dla dowolnych $a, b \in G$ zachodzi

$$ba = e.$$

Jeżeli w ostatniej równości przyjmiemy $b = e$, to oczywiste staje się, że

$$G = \{e\}.$$

Zad. 6

Prawdopodobieństwo sukcesu przy wyborze k monet wynosi:

$$p_k = \frac{\binom{100}{k}}{\binom{101}{k}} = \frac{100!}{k!\,(100-k)!}\,\frac{k!\,(101-k)!}{101!} = \frac{101-k}{101}.$$

Wartość oczekiwana wygranej wynosi:

$$EX_k = k\,\frac{101-k}{101} = \frac{1}{101}(-k^2 + 101\,k).$$

Największa wartość jest przyjęta dla $k = \frac{101}{2}$, lecz to nie jest liczba naturalna. A więc sprawdzamy dla $k = 50$ i $k = 51$ aby otrzymać:

$$EX_{50} = EX_{51} = \frac{2550}{101}.$$

Wniosek: $k \in \{50, 51\}$.

Wrocław, dnia 23 czerwca 2004