# Pisemny egzamin dyplomowy

# na Uniwersytecie Wrocławskim

# na kierunku matematyka

# część I

# zadania testowe

# 16 lutego 2004r.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **2.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **3.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **4.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **5.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **6.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **7.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **8.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **9.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |
| **10.** | a. T N | b. T N | c. T N | d. T N |

**1.** Czy prawdą jest, że

a) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\forall_{z\in\mathbb{R}}\ \sin(x+z)=\cos(y+z)$;

b) $\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\ \sin(x+z)=\cos(y+z)$;

c) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\ \sin(x+z)=\cos(y+z)$;

d) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{z\in\mathbb{R}}\ \sin(x+z)=\cos(y+z)$?

**2.** Czy z podanego warunku wynika, że ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do zera

a) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\ a_n^2<\varepsilon$;

b) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\ a_n^3<\varepsilon$;

c) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\ |a_n|<\varepsilon^3$;

d) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\ a_n<\varepsilon$?

**3.** Czy wartość podanej całki jest równa zero

a) $\int\limits_{-8}^{8}\sin^8x\,\sin^{88}x\,\sin^{888}x\,dx$;

b) $\int\limits_{-5}^{5}e^{\sin x}\,dx$;

c) $\int\limits_{-6}^{6}\sin 6x\,\cos 77x\,e^{666x^2}\,dx$;

d) $\int\limits_{-7}^{7}\sin^7x\,\sin^{77}x\,\sin^{777}x\,dx$?

**4.** Czy istnieje taka liczba niewymierna dodatnia $x$, że

a) liczba $x^3$ jest wymierna;

b) $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$;

c) liczba $x^2$ jest niewymierna;

d) liczba $\sqrt{x}$ jest wymierna?

**5.** Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{3+n\sqrt{n}}$;

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$;

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+3}$;

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$?

**6.** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy stąd wynika, że

a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest rozbieżny;

b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ jest zbieżny;

c) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny;

d) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ jest rozbieżny?

**7.** Czy istnieje taki ciąg $(a_n)$ niemający granicy skończonej, że

a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \{\frac{1}{k};\, k\in\mathbb{N}\}$;

b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 3 < a_n < \pi$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$;

d) ciąg $(a_n^2)$ jest zbieżny do 4?

**8.** Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}\ln x = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = -\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$?

**9.** Czy funkcja $f$ jest rosnąca na podanym przedziale

a) $f(x)=\sin\left(\frac{x+1}{100}\right),\ [0,4\pi]$;

b) $f(x)=\left(e^x-e^2\right)\left(e^x-e^7\right),\ [2,7]$;

c) $f(x)=\frac{\ln x}{17+e^{-x}},\ [3,777]$;

d) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ [-5,17]$?

**10.** Czy dla dowolnej liczby zespolonej $z$ o module 1 zachodzi warunek

a) $z^{360}=1$;

b) jeżeli $z^2\neq -1$, to $\frac{z}{1+z^2}\in\mathbb{R}$;

c) $z+z^{-1}\in\mathbb{R}$;

d) $\overline{z}=z^{-1}$?

**11.** Czy podany zbiór jest podgrupą grupy $\{1,2,3,4,5,6\}$ z mnożeniem modulo 7

a) $\{2,3,6\}$;

b) $\{1,2,3\}$;

c) $\{1,2,4\}$;

d) $\{2,4,6\}$?

**12.** Czy w grupie $\{0,1,2,\ldots,11\}$ z dodawaniem modulo 12 istnieje element rzędu

a) 6;

b) 4;

c) 5;

d) 3?

**13.** Czy wyznacznik podanej macierzy jest równy 0

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 13 & 15 \\ 0 & 2 & 7 & 11 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 13 & 17 & 19 & 23 & 29 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 31 & 37 & 41 & 43 & 47 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 102 \\ 2 & 4 & 3 & 8 & 203 \\ 3 & 9 & 5 & 27 & 305 \\ 4 & 16 & 7 & 64 & 407 \\ 5 & 25 & 11 & 125 & 511 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 23 & 37 & 43 \\ 0 & 3 & 13 & 29 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$?

**14.** Czy wektory $v_1$, $v_2$, $v_3$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^3$, jeśli $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (3,5,2)$ oraz

a) $v_3 = (4,8,7)$;

b) $v_3 = (3,7,5)$;

c) $v_3 = (2,6,3)$;

d) $v_3 = (1,2,1)$?

**15.** Czy istnieje taka liczba rzeczywista $a$, że układ równań

$$\begin{cases} ax+2y = 0 \\ 3x+4y = 0 \end{cases}$$

a) ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste ;
b) ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste ;
c) ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych ;
d) nie ma rozwiązań rzeczywistych ?

**16.** Czy dla dowolnej liczby zespolonej $z$ podana liczba jest liczbą rzeczywistą nieujemną
a) $z\cdot\overline{z}$ ;
b) $z+\overline{z}$ ;
c) $3|z|-z-\overline{z}$ ;
d) $z^2$ ?

**17.** Czy podany wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek całkowity
a) $x^6+2x^4+3x^2+4$ ;
b) $2x^6-4x^5+6x^3-7$ ;
c) $x^6-2x^4-3x^2+4$ ;
d) $x^5-5$ ?

**18.** W jednej urnie jest jedna kula biała i dwie kule czarne. W drugiej urnie jest $n$ kul białych i jedna kula czarna. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy kulę z wybranej urny. Niech $p_n$ będzie prawdopodobieństwem zdarzenia, że wylosowano kulę białą. Czy stąd wynika, że

a) $p_1 = 2/5$ ;

b) $p_5 = 7/12$ ;

c) $p_3 = 4/7$ ;

d) $p_2 = 1/2$ ?

**19.** Wykonano kolejno 4 rzuty monetą. Okazało się, że 2 razy wypadł orzeł, a 2 razy reszka. Czy wobec tego

a) prawdopodobieństwo, że w pierwszych dwóch rzutach wypadł jeden orzeł i jedna reszka, jest równe $2/3$ ;

b) prawdopodobieństwo, że w pierwszych dwóch rzutach wypadły dwa orły, jest równe $1/4$ ;

c) prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł, a w drugim reszka, jest równe $1/3$ ;

d) prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł, jest równe $1/2$ ?

**20.** Z urny zawierającej 6 kul z numerami 1, 2, 3, 4, 5, 6 wylosowano (bez zwracania) dwie kule. Niech $p_n$ będzie prawdopodobieństwem, że suma liczb na wylosowanych kulach jest równa $n$. Czy stąd wynika, że

a) $p_5 = p_6$ ;

b) $p_3 = p_4$ ;

c) $p_6 = p_7$ ;

d) $p_4 = p_5$ ?