Rozwiązania:

Zad. 1

Funkcje $f(x,y) = x + y$ i $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$ są różniczkowalna. Zbiór

$$A = \{(x,y) : x^2 + xy + y^2 = 1\} = \{(x,y) : g(x,y) = 1\} \quad \text{jest zwarty}$$

więc funkcja ciągła $z = f(x,y)$ osiąga na nim swoje kresy. Co więcej

$$\nabla g(x,y) = [2x + y, x + 2y]$$

i zachodzi

$$\nabla g(x,y) = [0,0] \iff 2x + y = 0 \ \wedge \ x + 2y = 0 \iff x = y = 0$$

więc

$$\nabla g(x,y) \neq [0,0] \quad \text{dla} \quad (x,y) \in A.$$

Korzystamy teraz z metody *mnożników Lagrangea* (warunek konieczny przyjmowania ekstremum): istnieje taka $\lambda \in \mathbb{R}$ że

$$\begin{cases} g(x,y) &= 1, \\ \nabla f(x,y) &= \lambda \, \nabla g(x,y) \end{cases}$$

dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ w którym $z = f(x,y)$ przyjmuje ekstremum. Z warunku $\nabla f(x,y) = \lambda \, \nabla g(x,y)$ otrzymujemy (tu $\nabla f(x,y) = [1,1]$), iż

$$\begin{cases} 1 &= \lambda \, (2x + y), \\ 1 &= \lambda \, (x + 2y). \end{cases}$$

Skąd wynika, że $\lambda \neq 0$ oraz $2x + y = x + 2y \iff x = y$ co podstawiając do warunku $g(x,y) = 1$ daje

$$g(x,x) = 3x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ponieważ otrzymaliśmy dwa punkty, więc oczywiste jest teraz że w jednym z nich

$$(x_0, y_0) = (-\tfrac{\sqrt{3}}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{3})$$

jest osiągana najmniejsza wartość funkcji $f(x_0, y_0) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$ a w drugim

$$(x_1, y_1) = (\tfrac{\sqrt{3}}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{3})$$

funkcja przyjmuje największą wartość $f(x_1, y_1) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zad. 2

Przyjmujemy za wiadome, że szereg

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\beta}$$

jest zbieżny dla $\beta > 1$ i nie jest zbieżny dla $\beta \leqslant 1$. Szereg

$$\sum_1^\infty \frac{n^\alpha + 1}{n^\alpha + n^2}$$

jest o wyrazach dodatnich, więc przy badaniu jego zbieżności możemy korzystać z kryterium porównawczego zbieżności szeregów. Z nierówności

$$\frac{1}{n^\alpha + n^2} < \frac{1}{n^2} \quad \text{spełnionej dla } \alpha \in \mathbb{R}$$

mamy, że szereg

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha + n^2} < \infty$$

jest zbieżny dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$. Stąd mamy, iż zbieżność szeregu

$$\sum_1^\infty \frac{n^\alpha + 1}{n^\alpha + n^2} = \sum_1^\infty \frac{n^\alpha}{n^\alpha + n^2} + \sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha + n^2}$$

jest równoważna zbieżności szeregu

$$\sum_1^\infty \frac{n^\alpha}{n^\alpha + n^2}.$$

Dalej będziemy się zajmować tym ostatnim. Mamy

$$\frac{n^\alpha}{n^\alpha + n^2} = \frac{1}{1 + n^{2-\alpha}} < \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

a więc gdy zachodzi

$$1 < 2 - \alpha \iff \alpha < 1$$

to badany szereg jest zbieżny. Natomiast dla $\alpha \geqslant 1$ mamy

$$2 - \alpha \leqslant 1$$

$$n^{2-\alpha} \leqslant n$$

$$1 + n^{2-\alpha} \leqslant n + 1$$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{1 + n^{2-\alpha}} = \frac{n^\alpha}{n^\alpha + n^2}$$

skąd wynika rozbieżność rozważanego szeregu (oczywiste jest, że szereg $\sum_1^\infty \frac{1}{n+1}$ jest rozbieżny).

Zad. 3

Podstawiamy

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x} = \left[\begin{array}{ccc} x & = & \ln t \\ dx & = & \frac{dt}{t} \end{array} \quad x\Big|_0^1 \quad t\Big|_1^e \right] = \int_1^e \frac{dt}{t(t^2 + t)}.$$

Dalej rozkład na ułamki proste

$$\frac{1}{t(t^2+t)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2}{t^2(t+1)}$$

skąd otrzymujemy, że

$$(B+C)t^2 + (A+B)t + A = 1$$

co daje

$$\begin{cases} A &= 1, \\ A+B &= 0, \\ B+C &= 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest $A = 1,\ B = -1,\ C = 1$. Kontynuując

$$\int_1^e \frac{dt}{t(t^2+t)} =$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{t^2} - \int_1^e \frac{dt}{t} + \int_1^e \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{t}\Big|_1^e - \ln t\Big|_1^e + \ln(t+1)\Big|_1^e =$$

$$= 1 - \frac{1}{e} - 1 + \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\frac{1+e}{2} - \frac{1}{e}.$$

Zad. 4

Oznaczamy $e_1 = [1,0,0]^T,\ e_2 = [0,1,0]^T,\ e_3 = [0,0,1]^T$ i $v = [1,0,1]^T$. Zauważamy, że $v = e_1 + e_3$. Skąd wnioskujemy, że jeżeli wektory e_1, e_3 są wektorami własnymi to dobrze by było (z uwagi na to że wektor v też ma być wektorem własnym) aby odpowiadały im te same wartości własne. Z podobnych względów, aby wektor $w = [1,1,1]^T$ nie był wektorem własnym (tu mamy $w = e_1 + e_2 + e_3$), to wartość własna odpowiadająca wektorowi e_2 powinna być różna od tej dla e_1, e_2. Niech więc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy teraz, że

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot e_1$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot e_2$$

$$Ae_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot e_3$$

i oczywiście

$$Av = A(e_1 + e_3) = Ae_1 + Ae_3 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_3 = 1 \cdot (e_1 + e_3) = 1 \cdot v.$$

Gdyby teraz było

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot w = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix},$$

to otrzymalibyśmy, że równocześnie

$$\lambda = 1 \quad \text{i} \quad \lambda = 2$$

co jest sprzeczne!

Zad. 5

Mnożenie liczb zespolonych jest działaniem przemiennym, więc każda podgrupa utworzona z liczb zespolonych z mnożeniem jako działaniem jest przemienna. Natomiast grupa permutacji S_3 nie jest przemienna. Dlatego też, to jest przyczyna dla której nie ma takiego zbioru

$$A = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\} \subset \mathbb{Z}.$$

Bo gdyby był, to byśmy mieli dla dowolnych $p, p' \in S_3$

$$p \circ p' = \phi(z) \circ \phi(z') = \phi(zz') = \phi(z'z) = \phi(z') \circ \phi(z) = p' \circ p$$

gdzie $\phi : S_3 \to A$ jest izomorfizmem z $p = \phi(z),\ p' = \phi(z')$. To że grupa permutacji S_3 jest nieprzemienna można przyjąć za ogólnie wiadome.

Zad. 6

Dla $n = 3$ mamy

$$\Omega = \{3t0n, 2t1n, 1t2n, 0t3n\}$$

i prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(\{3t0n, 2t1n\}) = p^3 + \binom{3}{2} p^2(1-p) = p^3 + 3p^2(1-p).$$

Dla $n = 4$ mamy

$$\Omega = \{4t0n, 3t1n, 2t2nO, 2t2nR, 1t3n, 0t4n\}$$

i odpowiednie prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} &P(\{4t0n, 3t1n, 2t2nO\}) \ = \\ &= \ p^4 + \binom{4}{3}p^3(1-p) + \binom{4}{2}p^2(1-p)^2\frac{1}{2} = \\ &= \ p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2\frac{1}{2} = \\ &= \ p^4 + 4p^3(1-p) + 3p^2(1-p)^2 = p^4 + p^2(1-p)(4p+3-3p) = \\ &= \ p^4 + p^2(1-p)(p+3) = p^4 + (p^2-p^3)(p+3) = \\ &= \ p^4 + p^3 - p^4 + 3p^2 - 3p^3 = p^3 + 3p^2(1-p). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy te same prawdopodobieństwa.