EGZAMIN DYPLOMOWY (BI), część II, 26.09.2003, 11.00-13.00

Zadanie **1.** (10 punktów)

Rozpatrzmy populacje ludzką, w której liczba kobiet jest równa liczbie mężczyzn. W populacji tej obserwujemy gen o dwóch allelach A i a ulokowany na chromosomie $\mathbf{X}$. Oznaczmy odpowiednio przez K_n i M_n częstość allelu A wśród kobiet oraz mężczyzn w n-tym pokoleniu.
Przyjmując założenie o losowym kojarzeniu i segregacji pokoleń oraz, że początkowe częstości allelu A wynoszą odpowiednio $K_0 = \alpha$ i $M_0 = \beta$, obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{M_n}.$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Rozpatrzy nić DNA o długści N nukleotydów, w której poszczególne nukleotydy pojawiaja się losowo. Przyjmijmy założenie, o niezależności i jednakowości rozkładu pojawiania się nukleotydów w nici. Tak więc każdy z nukleotydów może pojawić się w wybranym miejscu nici z prawdopodobieństwem $0{,}25$ niezależnie od sposobu obsadzenia pozostałych miejsc.
Niech Y_N oznacza liczbę pojawień sie ciagu *gaga* w rozpatrywanej nici. Ciągi mogą na siebie zachodzić, tak więc jeśli rozpatrujemy, przykładowo, nić postaci

$$tatgagagatccgaga$$

to liczebność ciagu *gaga* w tym przypadku wynosi 3.
(a) Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej Y_N.
(b) Obliczyć wariancję zmiennej losowej Y_N.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Zapytano 100 osób, czy chcieliby spędzać wakacje w górach. 49 osób spośród nich odpowiedziało 'TAK'. Oblicz przedział ufności dla prawdopodobieństwa odpowiedzi 'TAK' na to pytanie na poziomie istotności 0.99.
Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767

Zadanie **4.** (10 punktów)
Podaj ogólne rozwiązanie następującego układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2y - 2x \end{cases}.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY (EK), część II, 26.09.2003, 11.00-13.00

Zadanie **1.** (10 punktów)

Dane jest następujące zagadnienie programowania liniowego:
Zminimalizować

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5$$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
-x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & \geqslant & 8 \\
2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & + & 5x_5 & \geqslant & 10 \\
-2x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \geqslant & 5
\end{array}$$

$$x_i \geqslant 0$$

(a) sprawdź, czy wektor $x^0 = (0,0,4,0,2)$ jest optymalnym rozwiązaniem tego zagadnienia;
(b) znajdź optymalną wartość funkcji celu.

Zadanie **2.** (10 punktów)

Zakładamy prawo de Moivre'a przeżycia dla (x)-latka z $\omega - x = 4$, gdzie ω oznacza maksymalną długość życia oraz natężenie oprocentowania $\delta = 0.05$. Niech T_x oznacza przyszły czas życia x-latka oraz K_x będzie jego obciętym przyszłym czasem życia.
a) Jakie wartości przyjmuje K_x? Napisać, ile wynosi ${}_2p_x$, $\Pr(K_x = i)$ oraz e_x.
b) Obliczyć JSN dla ubezpieczenia na dożycie $\bar{A}_{x:\overline{2}|}$. Wiadomo, że $e^{-0.1} = 0.90484$.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Zapytano 100 osób, czy chcieliby spędzać wakacje w górach. 49 osób spośród nich odpowiedziało 'TAK'. Oblicz przedział ufności dla prawdopodobieństwa odpowiedzi 'TAK' na to pytanie na poziomie istotności 0.99.
Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767

Zadanie **4.** (10 punktów)
Podaj ogólne rozwiązanie następującego układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2y - 2x \end{cases}.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY (MI), część II, 26.09.2003, 11.00-13.00

Zadanie **1.** (10 punktów)

Napisać w **C** funkcję rozwiązującą z zadanym przybliżeniem równanie $f(x)=0$ metodą *przez połowienie przedziału*. Podać założenia o funkcji $y=f(x)$, przy których program skończy swoje działanie.

Zadanie **2.** (10 punktów)

Dla $\varepsilon>0$ niech

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla jakiego $\varepsilon>0$ w normie macierzowej

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

współczynnik *dobrego uwarunkowania macierzy* $\kappa(A)<16$?

Zadanie **3.** (10 punktów)

Zapytano 100 osób, czy chcieliby spędzać wakacje w górach. 49 osób spośród nich odpowiedziało 'TAK'. Oblicz przedział ufności dla prawdopodobieństwa odpowiedzi 'TAK' na to pytanie na poziomie istotności 0.99.

Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767

Zadanie **4.** (10 punktów)
Podaj ogólne rozwiązanie następującego układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y \\ \dfrac{dy}{dt} &= 2y - 2x \end{cases} .$$

EGZAMIN DYPLOMOWY (NA), część II, 26.09.2003, 11.00-13.00

Zadanie **1.** (10 punktów)

Wyznaczyć równanie sfery opisanej na czworościanie $ABCD$, gdzie współrzędne kartezjańskie wierzchołków są równe:

$$A(0,0,0),\ B(2,0,0),\ C(0,2,0),\ D(0,0,1)\,.$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1 i przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Zapytano 100 osób, czy chcieliby spędzać wakacje w górach. 49 osób spośród nich odpowiedziało 'TAK'. Oblicz przedział ufności dla prawdopodobieństwa odpowiedzi 'TAK' na to pytanie na poziomie istotności 0.99.
Skorzystać z odpowiedniego przybliżenia rozkładem normalnym oraz z podanej tablicy dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0,5000	0,4	0,6554	0,8	0,7881	1,2	0,8849	1,6	0,9452
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869	1,61	0,9463
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907	1,63	0,9484
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944	1,65	0,9505
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980	1,67	0,9525
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015	1,69	0,9545
0,1	0,5398	0,5	0,6915	0,9	0,8159	1,3	0,9032	1,7	0,9554
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049	1,71	0,9564
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082	1,73	0,9582
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115	1,75	0,9599
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147	1,77	0,9616
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177	1,79	0,9633
0,2	0,5793	0,6	0,7257	1	0,8413	1,4	0,9192	1,8	0,9641
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207	1,81	0,9649
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236	1,83	0,9664
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265	1,85	0,9678
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292	1,87	0,9693
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319	1,89	0,9706
0,3	0,6179	0,7	0,7580	1,1	0,8643	1,5	0,9332	1,9	0,9713
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345	1,91	0,9719
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370	1,93	0,9732
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394	1,95	0,9744
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418	1,97	0,9756
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761
0,39	0,6517	0,79	0,7852	1,19	0,8830	1,59	0,9441	1,99	0,9767

Zadanie **4.** (10 punktów)
Podaj ogólne rozwiązanie następującego układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2y - 2x \end{cases} .$$

EGZAMIN DYPLOMOWY (TE), część II, 26.09.2003, 11.00-13.00

Zadanie **1.** (10 punktów)

Niech $f: R \to R$ będzie ciągłą funkcją, o której wiadomo, że posiada pochodną $f'(x)$ dla wszystkich $x \neq 0$, i że $f'(x) \to 3$ przy $x \to 0$. Czy wynika stąd, że $f'(0)$ istnieje?

Zadanie **2.** (10 punktów)

Na przestrzeni macierzy rozmiaru $n \times n$ rozważ normę $||A||_1 = \sum |a_{ij}|$ oraz normę operatorową $||A||_0 = \sup\{|Ax| : x \in R^n, |x| = 1\}$.

(1) Uzasadnij, że są to normy.

(2) Uzasadnij, że normy te są równoważne.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Rozważmy pierścień Γ liczb całkowitych Gaussa, tzn. liczb (zespolonych) postaci $a + bi$, gdzie a,b są całkowite, z działaniami dodawania i mnożenia.

(A) Znajdź wszystkie elementy odwracalne w tym pierścieniu.

(B) Uzasadnij, że pierścień Γ z normą $||z|| := |z|^2$ jest pierścierniem euklidesowym, tzn. dla dowolnych $u,w \in \Gamma$ istnieją $q,r \in \Gamma$ takie, że $u = w \cdot q + r$, gdzie $||r|| < ||w||$.

Wskazówka: wykorzystać geometryczną interpretację liczb zespolonych rozważając zbiór wielokrotności $\{w \cdot g : g \in \Gamma\}$ liczby w.

Zadanie **4.** (10 punktów)

Mocne prawo wielkich liczb mówi, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są jednakowo rozłożonymi niezależnymi zmiennymi losowymi o skończonej wartości oczekiwanej m, zaś $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$, to $P(\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m\}) = 1$.

Zastosuj mocne prawo wielkich liczb do dowodu następującego twierdzenia:

zbiór liczb rzeczywistych, w których rozwinięciu dziesiętnym każda cyfra pojawia się po przecinku z asymptotyczną częstością $1/10$, ma pełną miarę (tzn. jego dopełnienie ma miarę Lebesgue'a zero).

Asymptotyczna częstość to granica $\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{n}$, gdzie w_n jest liczbą wystąpień danej cyfry na pierwszych n miejscach po przecinku.

EGZAMIN DYPLOMOWY (ZA), część II, 26.09.2003, 11.00-13.00

Zadanie **1.** (10 punktów)

Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych zbieżnym według rozkładu do zmiennej losowej X. Udowodnij, że dla dowolnych ciągów liczbowych $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takich, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, ciąg zmiennych losowych $\{a_n X_n + b_n\}$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej losowej $aX + b$.

Zadanie **2.** (10 punktów)

Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla łańcucha Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Zadanie **3.** (10 punktów)

Niech $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego o nieznanej wartości średniej μ. W klasie nieobciążonych estymatorów parametru μ znajdź estymator o minimalnej wariancji.

Zadanie **4.** (10 punktów)

Podaj ogólne rozwiązanie następującego układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2x \end{cases}.$$