

**1.** Czy prawdą jest, że

- a)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} y = x \cdot z$ ;
- b)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} y = x \cdot z$ ;
- c)  $\forall y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} y = x \cdot z$ ;
- d)  $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} y = x \cdot z$ ?

**2.** O twierdzeniu  $T(n)$  udowodniono, że prawdziwe są  $T(1)$  i  $T(6)$ , oraz że dla dowolnego  $n \geq 1$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(n+3)$ . Czy można stąd wnioskować, że

- a) fałszywe jest  $T(11)$ ;
- b) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  prawdziwe jest  $T(n^2)$ ;
- c) prawdziwe jest  $T(9)$ ;
- d) fałszywe jest  $T(3)$ ?

**3.** Czy jest prawdą, że

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ ?

**4.** Ciąg  $(a_n)$  nie jest zbieżny do granicy skończonej. Czy stąd wynika, że

- a) ciąg  $(b_n)$ , gdzie  $b_n = a_{2n}$ , nie jest zbieżny do granicy skończonej;
- b) ciąg  $(a_n)$  jest nieograniczony;
- c) istnieją takie liczby całkowite dodatnie  $m, n$ , że  $|a_m - a_n| > \frac{1}{1000}$ ;
- d) ciąg  $(a_n)$  ma co najmniej jeden wyraz niecałkowity?

**5.** Czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, jeśli

- a)  $a_n = \frac{n^e + 1}{n^{\pi} + 1}$ ;
- b)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - 7}$ ;
- c)  $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+7}}$ ;
- d)  $a_n = \frac{1}{n!}$ ?

**6.** Czy funkcja  $f(x) = \cos x$  jest monotoniczna na przedziale

- a)  $(7, 9)$  ;
- b)  $(4, 6)$  ;
- c)  $(6, 8)$  ;
- d)  $(5, 7)$  ?

**7.** Czy funkcja  $f$  ma lokalne minimum w punkcie  $(0, 0)$ , jeżeli dana jest wzorem

- a)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$  ;
- b)  $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y$  ;
- c)  $f(x, y) = x^2 + 5xy + 7y^2$  ;
- d)  $f(x, y) = x^4 + y^4 + xy$  ?

**8.** Czy jest prawdą, że

- a)  $\log_2 6 < \log_4 35$  ;
- b)  $\log_4 65 < \log_3 26$  ;
- c)  $\log_2 3 < \log_3 10$  ;
- d)  $\log_5 24 < \log_2 5$  ?

**9.** Czy funkcja  $f$  określona podanym wzorem jest ograniczona w swojej dziedzinie

- a)  $f(x) = \frac{x^5 + 15x^2 + 77x + 168}{x^4 + 1}$  ;
- b)  $f(x) = \frac{x^3 + 15x^2 + 77x + 168}{x^4 + 1}$  ;
- c)  $f(x) = \frac{x^4 + 15x^2 + 77x + 168}{x^3 + 1}$  ;
- d)  $f(x) = \frac{x^4 + 15x^2 + 77x + 168}{x^5 + 1}$  ?

**10.** Czy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia  $M$ , że dla dowolnej liczby całkowitej  $n > M$  zachodzi nierówność

- a)  $\sqrt[n]{1234567} > 2$  ;
- b)  $\ln(n^{1234567} + 1) > n$  ;
- c)  $n! > n^{1234567}$  ;
- d)  $n! > 1234567^n$  ?

11. Czy rząd podanej macierzy jest równy 4

a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

b) 
$$\begin{pmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 3 \\ 45 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

c) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix};$$

d) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}?$$

12. Wektory  $v_1, v_2, v_3$  tworzą układ wektorów liniowo niezależnych w  $\mathbb{R}^3$ . Czy stąd wynika, że

- a) wektory  $v_1 + v_2, v_2 + v_3$  oraz  $v_3 - v_1$  są liniowo **zależne**;
- b) wektory  $v_1 + v_2, v_2 + v_3$  oraz  $v_3 + v_1$  są liniowo niezależne;
- c) wektory  $v_1 - v_2, v_2 - v_3$  oraz  $v_3 - v_1$  są liniowo niezależne;
- d) wektory  $v_1 + v_2$  oraz  $v_3 - v_2$  są różne?

13. Macierz  $A$  o wymiarach  $2 \times 2$  ma wartości własne 1 i 3. Czy stąd wynika, że

- a) wyznacznik macierzy  $A$  jest liczbą całkowitą;
- b) rząd macierzy  $A$  jest równy 2;
- c) rząd macierzy  $A^2 - A$  jest równy 2;
- d) macierz  $A$  jest diagonalna?

**14.** Czy poprawnie obliczono wyznacznik

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 30 & 2 & 7 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 8 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\text{b) } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 6 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 120;$$

$$\text{c) } \det \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = 71;$$

$$\text{d) } \det \begin{pmatrix} 31 & 2 & 17 \\ 15 & 1 & 53 \\ 0 & 0 & 77 \end{pmatrix} = 77?$$

**15.** Czy istnieje element rzędu 3 w grupie

- a)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  z dodawaniem modulo 7;
- b)  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  z dodawaniem modulo 5;
- c)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  z mnożeniem modulo 7;
- d)  $\{1, 2, 3, 4\}$  z mnożeniem modulo 5?

**16.** Niech  $H$  będzie dowolną podgrupą grupy  $G$ . Czy stąd wynika, że dla dowolnych  $g \in G$  oraz  $h \in H$

- a)  $g^2 \in H$ ;
- b)  $hg \in H$ ;
- c)  $h^2 \in H$ ;
- d)  $gh \in G$ ?

**17.** Czy podany wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty

- a)  $x^{100} + x^{66} + 1$ ;
- b)  $x^{222} - x^{111} + 1$ ;
- c)  $7x^{111} + 4x^{44} + 33$ ;
- d)  $5x^{66} + 2x^{22} - 3$ ?

**18.** Czy jednym z rozwiązań równania  $z^{30} = 1$  jest

- a)  $z = i$ ;
- b)  $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ;
- c)  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ;
- d)  $z = 5 + i$ ?

**19.** Rzucamy 6-krotnie monetą. Czy prawdopodobieństwo podanego zdarzenia jest mniejsze od  $1/2$

- a) wypadły co najwyżej dwa orły;
- b) wypadła parzysta liczba orłów;
- c) liczba wyrzuconych orłów jest równa 3 lub 4;
- d) liczba wyrzuconych orłów jest liczbą pierwszą?

**20.** Dane są trzy urny: w pierwszej znajduje się kula biała, w drugiej kula biała i kula czarna, w trzeciej kula biała i dwie kule czarne. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy z niej kulę. Niech  $p/q$  oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowana kula jest biała, zapisane w postaci ułamka nieskracalnego. Czy wtedy

- a) liczba  $p$  jest większa od 10;
- b) liczba  $p$  jest parzysta;
- c) liczba  $q$  jest większa od 20;
- d) liczba  $q$  jest parzysta?