

Egzamin dyplomowy – zadania otwarte
luty 2003

Zadanie 1. (2 punkty)

Dowieść, że liczba $\sqrt{7}$ jest niewymierna.

Zadanie 2. (3 punkty)

Rozstrzygnąć, dla której wartości parametru A funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'_A(0)$ dla tej wartości parametru A .

Zadanie 3. (3 punkty)

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny.

Zadanie 4. (3 punkty)

Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb $2 \cdot 10^{100} + 1$ i $5 \cdot 10^{100} + 7$.

Zadanie 5. (4 punkty)

Wielomian charakterystyczny macierzy A o wymiarach 3×3 jest równy $x^3 - x$. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy $A + I$, gdzie I jest macierzą identycznościową.

Zadanie 6. (2+3=5 punktów)

Losujemy niezależnie dwie liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$ z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że mniejsza z wylosowanych liczb jest mniejsza od $\frac{1}{10}$.

b) Obliczyć wartość oczekiwaną mniejszej z wylosowanych liczb.