Wersja testu **A** 16 września 2002r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y<e^x$;

b) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\ y<e^x$;

c) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\ y<e^x$;

d) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ y<e^x$?

2. O twierdzeniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz że dla dowolnego $n\geqslant 6$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(11)$;

b) prawdziwa jest implikacja $T(3)\Rightarrow T(1)$;

c) prawdziwa jest implikacja $T(7)\Rightarrow T(13)$;

d) prawdziwe jest $T(10)$?

3. Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^8+8}{n^{10}+10}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt[3]{n}+2}$?

4. Czy poprawnie zastosowano regułę de l'Hospitala

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{\cos x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cos x}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1/x}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy+x^2}{4x^3+2y}$?

5. Czy jest prawdą, że

a) $\int_0^{11} e^{x^2}\,dx > e^{100}$;

b) $\int_0^{100} \operatorname{arctg} x\,dx > 200$;

c) $\int_e^{\pi} \ln x\,dx > 2$;

d) $\int_2^4 x^{1/x} dx > \sqrt{3}$?

6. Funkcja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły, spełnia warunek $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Czy możemy z całą pewnością stwierdzić, że f ma w punkcie $(0,0)$ lokalne maksimum, jeśli wiemy, że

a) $f''_{xx}(0,0) = e,\ f''_{yy}(0,0) = -3,\ f''_{xy}(0,0) = \pi$;

b) $f''_{xx}(0,0) = -e,\ f''_{yy}(0,0) = 3,\ f''_{xy}(0,0) = \pi$;

c) $f''_{xx}(0,0) = -2,\ f''_{yy}(0,0) = -3,\ f''_{xy}(0,0) = -5$;

d) $f''_{xx}(0,0) = -2,\ f''_{yy}(0,0) = 3,\ f''_{xy}(0,0) = -4$?

7. Czy istnieje ściśle malejący ciąg liczb wymiernych dodatnich

a) zbieżny do 1 ;

b) zbieżny do $\sqrt{2}$;

c) mający więcej niż 10 wyrazów całkowitych ;

d) niemający granicy skończonej ?

8. Pierwszy, drugi i piąty wyraz pewnego niestałego postępu arytmetycznego, tworzą (w podanej kolejności) postęp geometryczny. Czy stąd wynika, że postęp geometryczny tworzą także wyrazy

a) 5-ty, 8-my, 13-ty ;

b) 1-szy, 3-ci, 13-ty ;

c) 2-gi, 4-ty, 10-ty ;

d) 2-gi, 5-ty, 13-ty ?

9. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są rozbieżne. Czy stąd wynika, że rozbieżny jest także szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$?

10. Czy funkcja f określona podanym wzorem jest różniczkowalna w zerze

a) $f(x) = e^{|x|} - |x|$;

b) $f(x) = e^{|x|}$;

c) $f(x) = x \cdot |x|$;

d) $f(x) = |x|$?

11. Badamy własności wielomianów ze zbioru $\mathbb{R}[x]$. Czy prawdą jest, że

a) wielomian $x^{10} + 3x^2 - 1$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty ;

b) wielomian $2x^5 - 3x^3 + 11x^2 - x + 3$ przy dzieleniu przez wielomian $x + 2$ daje resztę 3 ;

c) liczba 1 jest co najmniej dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $10x^{11} - 11x^{10} + 1$;

d) wielomian $x^4 - x^2 + 1$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{R}$?

12. Czy podany zbiór z działaniem tworzy grupę

a) zbiór $\{-1, 1\}$ z mnożeniem ;

b) zbiór $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ z dodawaniem modulo 6 ;

c) zbiór wszystkich obrotów płaszczyzny wokół ustalonego punktu (łącznie z obrotem o kąt zerowy), ze składaniem przekształceń jako działaniem ;

d) zbiór liczb całkowitych nieujemnych z dodawaniem ?

13. Dane są macierze $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ oraz wektor $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Czy prawdą jest, że

a) $Ab=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $(A+B)b=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $(AB)b=(BA)b$;

d) $A^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

14. Dane są macierze $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $B=\begin{pmatrix} 1000 & 2000 \\ 3000 & 4000 \end{pmatrix}$. Czy prawdą jest, że

a) istnieje dokładnie jeden wektor $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ taki, że $Av=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

b) $\det(A-I)=0$;

c) $\det(A+B)=\det A+\det B$;

d) $\det(AB)=0$?

15. Czy prawdą jest, że

a) odwzorowanie $\varphi(x)=|x|$ jest izomorfizmem grupy $(\mathbb{Q},+)$ w siebie;

b) grupa przesunięć równoległych płaszczyzny jest izomorficzna z grupą $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ (jako działanie w $\mathbb{R}$ rozpatrujemy dodawanie liczb);

c) grupy $(\mathbb{R},+)$ i $\left(\mathbb{R}^+\setminus\{0\},\cdot\right)$ są izomorficzne;

d) zbiór liczb całkowitych i zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 2 z dodawaniem jako działaniem grupowym są izomorficzne?

16. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia dla liczb zespolonych

a) nie istnieje wielomian o współczynnikach rzeczywistych, którego pierwiastkiem jest $z = 1 - i$;

b) argument iloczynu dwóch liczb zespolonych jest równy iloczynowi ich argumentów;

c) $i^k \in \{i, 1, -1\}$ dla każdej liczby całkowitej k;

d) moduł iloczynu dwóch liczb zespolonych jest równy iloczynowi ich modułów?

17. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia dotyczące baz podanych przestrzeni liniowych

a) wektory $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,0)$ nie tworzą bazy przestrzeni euklidesowej E^3;

b) liczby zespolone $1+i$ oraz $1-i$ tworzą bazę przestrzeni linowej $\mathbb{C}$ nad liczbami rzeczywistymi $\mathbb{R}$;

c) wielomiany X^2+X+1, X^2+X, 1 tworzą bazę przestrzeni liniowej złożonej z wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych;

d) wektory $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ nie generują przestrzeni euklidesowej E^2?

18. Rozważamy układ równań

$$\begin{cases} 3x+2y &= 5 \\ x+ay &= 6 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem $a \in \mathbb{R}$. Czy prawdziwe są zdania

a) istnieje taka wartość parametru a, dla którego układ ten nie ma rozwiązań;

b) istnieje taka wartość parametru a, dla którego para $(x,y) = (1,1)$ jest rozwiązaniem tego układu;

c) istnieje taka wartość parametru a, dla którego istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego układu;

d) istnieje taka wartość parametru a, dla którego układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie?

19. Rzucamy dwa razy kostką. Niech
A: *pierwszy wynik jest równy 6* ,
B: *drugi wynik jest równy 5*,
C: *suma wyników jest liczbą parzystą.*
Czy wtedy

a) zdarzenia B i C są zależne;

b) zdarzenia A i B są niezależne;

c) zdarzenia A, B, C są niezależne;

d) zdarzenia A i C są niezależne?

20. Powtarzamy (do momentu wystąpienia pierwszego sukcesu) eksperyment o prawdopodobieństwie sukcesu $p < 1/2$. Niech M oznacza liczbę porażek poprzedzających pierwszy sukces. Czy stąd wynika, że

a) $P(M > m+n \ , \ M > m) = P(M > m+n)$ dla $m,n \geqslant 0$;

b) $P(M > 5 \mid M > 3) = P(M > 2)$;

c) $P(M = 2) < 1/8$;

d) $EM > 1$?