1. Niech $f:[0,\infty)\to R$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Udowodnij, że

$$\lim_{t\to 0} t\cdot\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx=1.$$

2. Uzasadnij, że w każdej domkniętej podgrupie $H\neq R$ w grupie $(R,+)$ element 0 jest punktem izolowanym. Uzasadnij też, że każda taka nietrywialna podgrupa H ma postać $H=\{ka : k\in Z\}$ dla pewnej liczby $a\neq 0$.

3. Dana jest funkcja $f(x)=2x$ oraz dwie niezależne zmienne losowe X i Y o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jednocześnie spełnione są warunki $X\leqslant Y$ oraz $\int_X^Y f(x)dx \geqslant 1/2$.

4. $SL(2,Z)$ to zbiór macierzy rozmiaru 2×2 o wyrazach całkowitych i o wyznaczniku 1.

(A) Uzasadnij, że $SL(2,Z)$ jest podgrupą w grupie wszystkich macierzy odwracalnych rozmiaru 2×2.

(B) Udowodnij, że dla dowolnych względnie pierwszych liczb p,q istnieje macierz $A\in SL(2,Z)$ postaci $A=\begin{pmatrix} p & x \\ q & y\end{pmatrix}$.

(C) Udowodnij, że dla dowolnych dwóch par p_1,q_1 oraz p_2,q_2 liczb całkowitych względnie pierwszych (tzn. takich, że $(p_1,q_1)=1$ oraz $(p_2,q_2)=1$) istnieje macierz $A\in SL(2,Z)$ taka, że $A\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2\end{pmatrix}$.