Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część I

zadania testowe

19 czerwca 2002r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\exists_{k\in\mathbb{Z}}\ n=k^2$;

b) $\exists_{n\in\mathbb{Z}}\forall_{k\in\mathbb{Z}}\ n=k^2$;

c) $\forall_{k\in\mathbb{Z}}\exists_{n\in\mathbb{Z}}\ n=k^2$;

d) $\exists_{k\in\mathbb{Z}}\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ n=k^2$?

2. O twierdzeniu $T(n)$ wiadomo, że
prawdziwe jest $T(1)$,
dla dowolnego $n\geqslant 1$ zachodzi wynikanie $T(n)\Rightarrow T(2n)$,
dla dowolnego $n\geqslant 8$ zachodzi wynikanie $T(n)\Rightarrow T(n-7)$.
Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

a) $T(13)$;

b) $T(15)$;

c) $T(14)$;

d) $T(12)$?

3. Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\sin n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[7]{n}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt{n+2}}$?

4. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d. Czy liczba a na pewno jest wymierna, jeśli wiadomo, że wymierne są liczby

a) $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+a$;

b) $a+b$, $a+c$;

c) $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+a$, $d+a+b$;

d) $a+b$, $a+c$, $b+c$?

5. Czy funkcja $f(x)=\sin|x|$ ma lokalne minimum w punkcie

a) $x=\pi$;

b) $x=\pi/2$;

c) $x=3\pi/2$;

d) $x=0$?

6. Czy poprawnie obliczono pochodną funkcji

a) $\frac{d}{dx}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)=4\sin x\cos x$;

b) $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$;

c) $\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=4\sin x\cos x$;

d) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$?

7. Czy poprawnie dokonano zamiany kolejności całkowania

a) $\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{1-y} f(x,y)dxdy$;

b) $\int_0^1\int_x^1 f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^y f(x,y)dxdy$;

c) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)dxdy$;

d) $\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$?

8. Czy dla dowolnej liczby zespolonej z takiej, że $|z|=1$, spełniony jest warunek

a) $z+\overline{z}\leqslant 2$;

b) $\overline{z}=z$;

c) $\overline{z}=\frac{1}{z}$;

d) $z^2\neq i$?

9. Czy prawdziwa jest nierówność (argumenty funkcji podane są w radianach)

a) $\sin 314<0$;

b) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}<1$;

c) $\cos 1<\frac{1}{2}$;

d) $\sin 1<\frac{1}{2}$?

10. Czy prawdziwa jest równość

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 4 - \ln 3$;

b) $\int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 3 - \ln 2$;

c) $\int_2^8 \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 4 - \ln 3$;

d) $\int_2^4 \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 5 - \ln 2$?

11. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Czy prawdą jest, że

a) $AB = B^{-1}A$;

b) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $5A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$?

12. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 1000 & 2000 \\ 3000 & 4000 \end{pmatrix}$. Badamy własności wyznaczników macierzy A i B. Czy prawdą jest, że

a) $\det(A^{10000}) = 1$;

b) $\det B = \det A$;

c) $\det(AB) = \det(AB^{-1})$;

d) $\det(AB) = 0$?

13. Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Czy jest prawdą, że

a) wielomianem charakterystycznym macierzy A jest $w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35$;

b) $\lambda = 7$ jest wartością własną macierzy A;

c) Wektor $v = (-4, 2)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\lambda = -5$;

d) macierz A ma dwie różne rzeczywiste wartości własne?

14. Rozważamy układ równań

$$\begin{cases} 3x+2y &= 4 \\ x-4y &= -1 \\ x+10y &= 6 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y. Czy prawdziwe jest zdanie

a) rząd macierzy rozszerzonej układu jest równy 3;

b) istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego układu;

c) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego układu;

d) układ ten nie ma rozwiązań?

15. Rozważamy grupę $Z_{17}=\{1,2,3,4,...,16\}$ z mnożeniem modulo 17. Czy prawdą jest, że

a) zbiór $\{1,5,10,15\}$ z mnożeniem modulo 17 jest podgrupą grupy Z_{17};

b) elementem odwrotnym do 15 w grupie Z_{17} jest 3 ;

c) $15\cdot 16=1$ w grupie Z_{17};

d) równanie $7x=5$ nie ma rozwiązań w grupie Z_{17}?

16. Czy prawdziwe jest następujące stwierdzenie dotyczące baz podanych przestrzeni liniowych

a) wektory (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0) i (1,1,1,1) są liniowo zależne;

b) wielomiany X^2+X+1, X^2+X, 1 tworzą bazę przestrzeni liniowej złożonej z wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych;

c) wektor (1,2,1) jest liniową kombinacją wektorów (1,1,1) i (1,0,1);

d) wektory (0,1,1), (1,0,1), (−1,1,0) tworzą bazę przestrzeni euklidesowej E^3?

17. Czy prawdziwa jest następująca równość dla liczb zepolonych

a) $(1+3i)\cdot(3-2i)=2+4i$;

b) $e^{2i\pi}=i$;

c) $(1-i)^{12}=-64$;

d) $(-2+i)^{-1}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$?

18. Dane są dwa wielomiany nad ciałem liczb rzeczywistych:
$w=(x-1)^5(x+2)^2(x^2+3)(x^2+4)^2$ oraz
$v=-2(x-1)^2(x+2)(x+5)(x^2+4)$.
Czy jest prawdą, że

a) $NWD(w,v)=2(x-1)^2(x+2)(x^2+4)$;

b) wielomian w ma dokładnie dwa różne pierwiastki zespolone nierzeczywiste ;

c) wielomian w dzieli się bez reszty przez wielomian v ;

d) $NWW(w,v)=(x-1)^2(x+2)^2(x+5)^2(x^2+4)^2$?

19. Rzucamy kostką czerwoną, a następnie zieloną. Niech A będzie zdarzeniem: *wypadło 2 na zielonej lub więcej niż 4 na czerwonej kostce*, oraz B:*suma wyników na obu kostkach jest większa lub równa 8.* Wtedy

a) $P(A)=1/2$;

b) zdarzenia A i B są niezależne ;

c) $P(A)=P(B)$;

d) $P(A\cap B)=1/4$.

20. Paweł i Piotr rzucają na zmianę rzutkami do celu. Paweł rzuca pierwszy. Załóżmy, że trafia on z prawdopodobieństwem 1/4, a Piotr z prawdopodobieństwem 1/3. Wtedy

a) szansa, że Piotr trafi do celu 3 razy w 6 próbach równa się 160/729 ;

b) średnia ilość porażek przed trafieniem do celu przez Pawła wynosi 3 ;

c) wartość oczekiwana łącznej liczby trafień przez Pawła i Piotra po 25 kolejkach wynosi 14 ;

d) prawdopodobieństwo, że Paweł chybi mniej razy niż Piotr przed swoim trafieniem równa się 1/3 .