Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność teoretyczna

20 czerwca 2002

1. Znajdź równanie parametryczne krzywej różniczkowalnej na płaszczyźnie, która przecina wszystkie proste z pęku o wspólnym punkcie O pod ustalonym kątem α, gdzie $0 < \alpha < \pi/2$.

Wskazówka: za parametr przyjmij kąt, jaki tworzy promień wodzący OX punktu X na krzywej z ustaloną półprostą OA; dobierz dogodny układ współrzędnych oraz ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie różniczkowe.

2. Skonstruuj (wraz z uzasadnieniem) przykład operatora liniowego T o normie 1 na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, mającego własność
$|T(X)| < |X|$ dla dowolnego $X \in \mathcal{H}, X \neq 0$.

3. **(A)** Uzasadnij, że zbiór L wszystkich funkcji $f : R \to R$ postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in R, a \neq 0$, z działaniem składania, tworzy grupę.

(B) Rozważ na zbiorze L metrykę d określoną w następujący sposób: jeśli $f_1(x) = a_1 x + b_1$ i $f_2(x) = a_2 x + b_2$ to $d(f_1, f_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$. Uzasadnij, że działanie mnożenia oraz branie elementu odwrotnego w grupie L są działaniami ciągłymi (względem powyższej metryki).

(C) Korzystając z tego, że jedynymi ciągłymi homomorfizmami
$f : (R, +) \to (R - \{0\}, \cdot)$ są funkcje wykładnicze $f(t) = e^{ct}$, znajdź wszystkie ciągłe homomorfizmy $h : (R, +) \to L$.

4. Uzasadnij, że jeśli obraz $f(U)$ pewnego otwartego zbioru $U \subset C$ przez funkcję analityczną f ma miarę zero, to funkcja f jest (lokalnie) stała na U.