Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część I

zadania otwarte

19 czerwca 2002r.

Zadania otwarte, 19 czerwca 2002r.

1. Rozwiązać nierówność

$$\log_{|x-1|}(2x+3) \leqslant \log_{|x-1|} x^2 .$$

2. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1000n < 2^n + 10000 .$$

3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = y + z$$

na okręgu określonym równaniami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 3x + y = 3 .$$

Podać punkty, w których te wartości są osiągane.

4. Udowodnić, że jeżeli wektory v_1, v_2, v_3 są liniowo niezależne, to wektory

$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad w_2 = v_1 + v_2, \quad w_3 = v_2 + v_3$$

również są liniowo niezależne.

5. Znaleźć rozkłady na czynniki pierwsze wielomianu $w(x) = x^6 - 1$ nad ciałami liczb rzeczywistych oraz liczb zesplonych.

6. Rzucamy kostką. Jeśli wynik jest mniejszy lub równy 2, to losujemy kulę z urny 1, w przeciwnym wypadku losujemy kulę z urny 2. Jak ułożyć 4 czarne i 4 białe kule w 2 urnach, tak aby prawdopodobieństwo wybrania kuli białej było jak największe, zakładając, że w każdej z urn znajduje się przynajmniej jedna kula każdego z kolorów? Podać wartość tego prawdopodobieństwa.