Próbny pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część I

zadania testowe

Kwiecień 2002

Instrukcje:
W każdym zadaniu należy udzielić czterech niezależnych odpowiedzi **TAK//NIE**.

1. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musi być zbieżny, jeśli wiadomo, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$;

d) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny ?

2. O twierdzeniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe oraz że dla dowolnego $n \geq 17$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

a) $T(21)$;

b) $T(17)$;

c) $T(11)$;

d) $T(20)$?

3. Czy dodatnia jest liczba (argumenty funkcji podane są w radianach)

a) $\sin 3$;

b) $\sin 5$;

c) $\sin 1 + \cos 3$;

d) $\cos 2$?

4. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int_{-10}^{10} \sin(x^{333} + x)\, dx > 2$;

b) $\int_0^2 \sqrt{x^2+1} dx > 2$;

c) $\int_0^1 x^{14} e^x dx > \frac{1}{15}$;

d) $\int_0^4 \sqrt{x^2+1} dx > 8$?

5. Czy poprawnie podano wzór na pochodną funkcji

a) $f(x) = 2^x, \quad f'(x) = e^x \ln 2$;

b) $f(x) = \ln(x^4 + x^3 + 1), \quad f'(x) = \frac{1}{x^4+x^3+1}$;

c) $f(x) = x^9 + 6x^5 + 30, \quad f'(x) = 9x^8 + 30x^4$;

d) $f(x) = \sin x \cos e, \quad f'(x) = \cos x \cos e - \sin x \sin e$?

6. Czy funkcja $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{gdy} \quad y \geq x^3 \\ xy & \text{gdy} \quad y < x^3 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie

a) (2,2) ;

b) (1,-1) ;

c) (2,8) ;

d) (-1,-1) ?

7. Czy dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi nierówność

a) $|z + \overline{z}| \leq 2|z|$;

b) $|z| \leq |z + i|$;

c) $|z\overline{z}| \leq |z\overline{z} + i|$;

d) $|\overline{z}| \leq |z|$?

8. Czy funkcja f ma minimum lokalne w podanym punkcie

a) $f(x,y) = 10xy - x^2 - y^2$, (0,0) ;

b) $f(x,y) = e^x + e^{2y}$, $(\ln 2, \ln 5)$;

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, (0,0) ;

d) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$, (0,0) ?

9. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0} \sin\delta < \varepsilon$;

b) $\exists_{\varepsilon>0}\, \forall_{\delta>0} \sin\varepsilon < \delta$;

c) $\exists_{\varepsilon>0}\, \forall_{\delta>0} \sin\delta < \varepsilon$;

d) $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0} \sin\varepsilon < \delta$?

10. Czy istnieje taki ciąg (x_n) o wyrazach **wymiernych** z przedziału $(0,1)$, że

a) ciąg (x_n) jest zbieżny do 0,314 ;

b) ciąg (x_n) nie jest zbieżny ;

c) ciąg (x_n) jest zbieżny do $\frac{\sqrt{2}}{3}$;

d) ciąg (x_n) jest zbieżny do 0 ?

11. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Czy prawdą jest, że

a) $A * B * A^{-1} = B$;

b) $A * B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $2A + 3B = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

12. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 \end{pmatrix}$. Badamy własności wyznaczników macierzy A i B. Czy prawdą jest, że

a) $\det(A^{2002}) = 2002$;

b) $\det(AB) = \det A \det B$;

c) $\det(AB) = \det(A^{-1}B)$;

d) $\det B = 0$?

13. Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Czy prawdą jest, że

a) wielomianem charakterystycznym macierzy A jest
$w(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 7$;

b) wektor $v = (1, 1, 1)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$;

c) wyznacznik macierzy A jest równy iloczynowi jej wartości własnych;

d) macierz A ma trzy różne rzeczywiste wartości własne ?

14. Rozważamy układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y & = & 4 \\ x - 4y & = & -1 \\ 7x + 10y & = & 12 \\ 5x + 6y & = & 8 \\ 3x - 16y & = & -5 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y. Czy prawdziwe jest zdanie:

a) rząd macierzy rozszerzonej układu jest równy 2 ;

b) istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego układu ;

c) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego układu ;

d) układ ten nie ma rozwiązań ?

15. Rozważamy grupę $Z_{113} = \{0, 1, 2, ..., 111, 112\}$ z dodawaniem modulo 113. Czy prawdziwa jest równość

a) $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - ... - 112 = 56$;

b) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + ... - 111 + 112 = 27$;

c) $1 + 2 + 3 + ... + 112 = 48$;

d) $(2 + 4) - 16 = 58$?

16. Czy prawdziwe jest następujące zdanie dotyczące baz podanych przestrzeni liniowych:

a) wektory $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 5)$ i $(0, 0, 0, 1)$ są liniowo zależne ;

b) wielomiany X, $X+1$, X^2+X+1 tworzą bazę przestrzeni liniowej złożonej z wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych ;

c) wektor $(1, 4, 7)$ jest liniową kombinacją wektorów $(1, 1, 1)$ i $(1, 0, 1)$;

d) wektory $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$ tworzą bazę przestrzeni euklidesowej E^3 .

17. Czy prawdziwa jest następująca równość dla liczb zespolonych:
a) $(5+3i)\cdot(7-2i)=2+4i$;
b) $i^{2002}=1$;
c) $(1+i)^4=-4$;
d) $(-1+2i)^{-1}=2+2i$?

18. Dane są dwa wielomiany nad ciałem liczb rzeczywistych:

$$w=(x-1)^5(x+2)^2(x-3)(x^2+4)^2$$

oraz

$$v=-2(x-1)^2(x+2)(x+5)(x^2+4)\ .$$

Czy prawdą jest, że
a) $NWD(w,v)=(x-1)^2(x+2)(x+5)$;
b) wielomian w ma dokładnie dwa różne pierwiastki zespolone nierzeczywiste ;
c) wielomian w dzieli się bez reszty przez wielomian v ;
d) $NWW(w,v)=(x-1)^2(x+2)^2(x+5)^2(x^2+4)^2$?

19. Zdarzenia A i B są niezależne i takie, że $P(A),P(B)\in(0,1)$. Czy stąd wynika, że niezależne są zdarzenia
a) $\emptyset, B$;
b) Ω, A ;
c) $A\cap B, A$;
d) $\Omega\setminus A,\ \Omega\setminus B$?

20. Rzucamy kostką do gry i otrzymanie 6 oczek traktujemy jako sukces, a inny wynik jako porażkę. Rzucamy tak długo, aż wypadnie szóstka. Liczbę porażek przed uzyskaniem szóstki oznaczmy przez N. Wtedy
a) $P(N=0)=1//216$;
b) $EN=15$;
c) $P(N=1)=0,069$;
d) $VarN=90$.