Próbny pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część I

zadania otwarte

Kwiecień 2002

1. Rozstrzygnąć, dla której wartości parametru A funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'_A(0)$ dla tej wartości parametru A.

2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 3x + 4y + 5$$

na okręgu o równaniu

$$x^2 + y^2 = 1 \; .$$

3. Udowodnić wzór Leibniza na pochodną iloczynu:

$$(fg)' = f'g + fg' \; .$$

4. Wyznaczyć wszystkie takie macierze M o wymiarach 2×2, że

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M$$

5. Dowieść, że permutacja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

nie daje się przedstawić w postaci $s_1 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_k$, gdzie

$$s_1, s_2, \ldots, s_k \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right\} \; .$$

6. W urnie znajduje się 5 kul białych, 5 kul czerwonych i jedna czarna. Losujemy niezależnie, ze zwracaniem kule do chwili wyciągnięcia kuli czerwonej. Liczbę prób przed wyciągnięciem kuli czerwonej oznaczmy przez I. Oznaczmy przez L liczbę prób, w których wyciągnęliśmy kulę czarną przed uzyskaniem kuli czerwonej.

a. Obliczyć $P(I = k)$, $k = 0, 1, \ldots$

b. Obliczyć $E(L \mid I = k)$.

c. Obliczyć EL.

d. Zakładając, że liczba kul białych jest j, a liczba kul czerwonych jest k (oraz jedna czarna) obliczyć EL.